Esercizio sul pacchetto Gauss

Rappres una particella localizzata in $x=0$

$$|\psi(x)|^2 = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1$$

integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

ma chi è $\psi(x)$?

$$\psi(x) = e^{i\varphi(x)} \underbrace{\frac{e^{-x^2/4\sigma^2}}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2}}}_{\rho(x)}$$

fase generica $\Rightarrow$ impulso medio del pacchetto

Calcoliamo l'impulso medio

valore d'aspettazione

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \rho(x) e^{-i\varphi(x)} \frac{\partial}{\partial x} \rho(x) e^{+i\varphi(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho(x)e^{i\varphi(x)} = \rho' e^{i\varphi} + i\varphi'\rho e^{i\varphi}$$

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\cancel{\underbrace{\rho(x)}_{\text{pari}}\,\underbrace{\rho'(x)}_{\text{dispari}}} + \hbar\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\rho^2(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$$

— dispari

$$\boxed{\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = \hbar\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\rho^2(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}}$$

generale per $\forall$ funz d'onda

per le gaussiane

$$\langle\hat{p}\rangle = \hbar\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$$

Caso semplice $\boxed{\varphi = 0 \Rightarrow \langle\hat{p}\rangle = 0}$

φ lineare in x $\varphi(x) = kx$

$$\boxed{\psi(x) = e^{ikx}\,\frac{e^{-x^2/4\sigma^2}}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^2} \rightarrow \langle\hat{p}\rangle = \hbar k}$$

pacchetto con velocità di gruppo const

funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \psi(x) \, e^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\sigma^2} e^{i\varphi(x)} e^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

con una fase generica non so fare il calcolo

considero la $\varphi(x) = kx$ lineare

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{1/2} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2} + ikx - \frac{i}{\hbar}px}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\Sigma^2} + ax} = e^{\frac{\Sigma^2 a^2}{2}}$$

termine lineare

Generatrice Momenti Gaussia

nel ns caso

$\Sigma^2 = 2\sigma^2$

$a = i(k - \frac{p}{\hbar})$

contando

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{1/2} \sqrt{2\pi\Sigma^2} \, e^{-\frac{\Sigma^2 (k - p/\hbar)^2}{2}}$$

posso scrivere questo come

$$\boxed{\phi(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}}\right)^{1/2} e^{-\frac{(p-\hbar k)^2}{4\sigma_p^2}}}$$

è reale!

$$\sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

nell'esponente infatti indicando

$$\frac{2\sigma^2}{2}(k - p/\hbar)^2 = \frac{\sigma^2}{\hbar^2}(p-\hbar k)^2 = \frac{1}{4\sigma_p^2}(p-\hbar k)^2$$

la normalizzazione segue perché deve essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \, |\phi(p)|^2 = 1$$

$$|\phi(p)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-\frac{(p-\hbar k)^2}{2\sigma_p^2}}$$

gaussiana a valore aspettato $\hbar k$

la fluttuazione dell'impulso sarà

$$\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \int dp \, |\phi(p)|^2 p^2 - \left(\int dp \, |\phi(p)|^2 p\right)^2 = \sigma_p^2$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

cfr

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2$$

$$\sigma_p^2 \sigma^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$