

9 JFT 22/10/2020

Formalismo Hamiltoniano Generatori

①

Th di Noether

per ogni simmetria (trasfo di coord/temp)
(differenziabile) continua $\Rightarrow$ Esiste
una (conce) conservata

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q + \mathcal{L} \delta t$$

Transt
system

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \begin{cases} q' = q + \delta q \\ t' = t + \delta t \end{cases}$$

INVATRASLA

$$\begin{cases} q' = q + a \\ t' = t \end{cases} \quad Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} a \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = p \text{ conservato}$$

INVATRASLA TEMPO

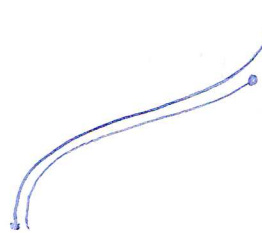
$$\begin{cases} q'(t) = q(t-a) \\ t' = t+a \end{cases}$$

$$Q = -a \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + a \mathcal{L} = -a H \text{ conservato}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \forall a \Rightarrow H(q, p) \text{ indep } t$$

invariante tempo

(2)



$$q' = q(t-a)$$

Hamilton

trasfo canonico
↑
simmetrie

Trasfo Canonico

Eq di Hamilton

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{Lagrange}$$

$$H = p\dot{q} - L \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

Eq di Hamilton

3

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

cfr dinamica pto mat

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{cinetica}} + \underbrace{V(q)}_{\text{pot}} \leftarrow \frac{1}{2} m \dot{q}^2 = \frac{1}{2m} m^2 \dot{q}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{p}{m} = \frac{m\dot{q}}{m} & \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial V}{\partial q} = \cancel{m} \frac{dp}{dt} & \end{aligned}$$

↑
- Forza

dalla trasform di Legendre

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) & p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\ dH &= dp\dot{q} + p\cancel{d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q}}_{-p d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \Leftarrow \text{Lagrange } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

anche se L dipende del tempo

trasformazioni canoniche

(4)

$$(q, p) \rightarrow (Q, P) \quad \begin{cases} Q = Q(q, p) \\ P = P(q, p) \end{cases}$$

è canonica se e solo se

date 2 generiche funz. il commutatore canonico

$$\{A, B\}_{pq} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} \frac{\partial A}{\partial p}$$

è invariante

$$\boxed{\{A, B\}_{pq} = \{A, B\}_{PQ}} \quad \text{def}$$

La trasform. canonica lascia invariate le eq. di Hamilton

$$\{H, p\} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\{H, q\} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \{p, H\} = -\{H, p\} \\ \dot{q} = \{q, H\} = -\{H, q\} \end{cases}$$

se $\{, , \}$ invariante anche le Eq. H lo sono

p & q CANONICAMENTE CONIUGATE $\rightarrow$ ved. dopo $\rightarrow$

(5)

Funzioni Generatrici per le Trasfo Canoniche

Goldstein
"Meccanica Classica"
Zambelli

p e q si dicono

canoniche coniugate

P CANONIC
CONIUGA Q se def $\{q, p\} = 1$

looking

$$\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = 1$$

Trasfo canoniche

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad \text{con } \{q, p\}_{qp} = \{Q, P\}_{QP} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \text{orig} \\ \overline{\text{orig}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{transf} \\ \overline{\text{transf}} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\text{orig}} = \frac{\partial F}{\partial \text{orig}}$$

$$\overline{\text{transf}} = \frac{\partial F}{\partial \text{transf}}$$

F funzione generatrice

Esistono 4 tipi di funzioni generatrici (6)

$$\text{I) } F(q, Q) \quad p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

$$\text{II) } F(q, P) \quad p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

$$\text{III) } F(p, Q) \quad q = -\frac{\partial F}{\partial p} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

$$\text{IV) } F(p, P) \quad q = -\frac{\partial F}{\partial p} \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

La derivata la continua
perché le prime due e
cont e derivabile

Con eventuale dipendenza esplicita del tempo
qui omeote, la dipendenza dal tempo è
evidente in caso di Ham dip da t

Sotto una trasf. canonica

$$H \rightarrow \bar{H} = H(q(P, Q), p(P, Q)) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

la trasformazione canonica IDENTITA'
nella convenzione (II)

$$F_{II}(q, P) = q P$$

$$p = \frac{\partial F_{\perp}}{\partial q} = P$$

$$Q = \frac{\partial F_{\perp}}{\partial P} = q \quad \text{c.v.d.}$$

7

Trasformazione & Generatore ω -simo

$$F_{\varepsilon}(q, P) = F_{\perp}(q, P) + \varepsilon G(q, P)$$

piccolo

generatore
 ω -simo

in pratica $G(q, P_{\uparrow}^{(0)}) = G(q, P)$
ordine zero

Traslazione

$$F_a = qP + aP$$

$$p = \frac{\partial F_a}{\partial q} = P$$

$$Q = \frac{\partial F_a}{\partial P} = q + a \quad \left(\begin{array}{l} \text{Traslazione} \\ \text{della coordinate} \\ \text{in avanti} \end{array} \right)$$

per a piccolo ha la trasformazione ω -sima

che ha come generatore $P^{(0)} = p$

l'impulso è il generatore ω -simo della
traslazione

Traslazione temporale in funzione

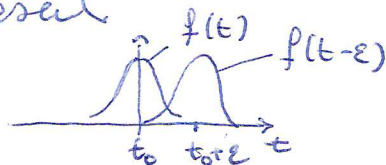
(8)

nel formalismo hamiltoniano
la traslazione temporale (o-sine) è una
trasformazione canonica

$$q'(t) = q(t - \varepsilon) \quad \left(\begin{array}{l} \text{traslazione} \\ \text{all'indietro} \\ \text{del tempo} \end{array} \right)$$

per confondere le idee contraria definire
per essere coerenti

$$t' = t - \varepsilon$$



$$q'(t) = q(t + \varepsilon)$$

$$Q(t) = q(t + \varepsilon) = q(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \varepsilon$$

$$P(t) = p(t + \varepsilon) = p(t) - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right) \varepsilon$$

$$F_\varepsilon(q, p) = q p + \varepsilon H$$

traslazione

$$Q = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial p} = q + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{ordine (0)}$$

$$p = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial q} = p + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow p = p - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q}$$

Trasla Coordinata in MQ

(9)

Traslazione ∞ -esima della coordinata nella funzione d'onda (alibi 4,58) Forse

$$\psi(x+\varepsilon) = \psi(x) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

$$\psi(x+\varepsilon) = \left[1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi(x)$$

operatore ∞ -esimo di traslazione



corrispondenza

funzione generatrice
 ∞ -esima

Il generatore ∞ -esimo della traslazione è l'impulso

MC

nella funzione generatrice
il generatore ∞ -esimo
è

$$\varepsilon p$$

dimensionale

ha come dimensione

una

azione

MQ

nell'operatore di
traslazione l'operatore
generatore ∞ -esimo è

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$$

adimensionale

$$\varepsilon \hat{p} \psi = (\kappa) \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

[azione]

qualcosa che

ha le dimensioni di azione = $\hbar$

numero complesso
di modulo 1

La costante $\hbar$ è scelta della quantità fondamentale di azione (10)

K ha modulo 1 perché tutta la grandezza specifica (il modulo) è nelle def delle grandezze elementari di azione in fatti potrei dire

$$\hat{p} = z \frac{\partial}{\partial x}$$

DeBroglie

con z numero complesso di modulo $\hbar$

$K = \pm i$ necessariamente affinde
 $\hat{p}$ sia Hermitiano

$K = -i$ affinde le autofunzioni di $\hat{p}$
Basis p. a onda progressive corrispondono
a impulsi diretti verso le parte positive
dell'asse x

Hermiteità di $\hat{p}$

(11)

$$\frac{\hat{p}}{\hbar} = \pm i \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\langle \varphi | \hat{p} | \varphi \rangle = (\langle \varphi | \hat{p} | \varphi \rangle)^*$$

$$\pm i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi^*(x) \varphi'(x) = \pm i \left\{ \cancel{\varphi^*(x) \varphi(x)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \frac{\partial \varphi^*(x)}{\partial x} \right\}$$

↑
Hilbert

$$= \mp i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \frac{\partial \varphi^*(x)}{\partial x}$$

$$(\langle \varphi | \hat{p} | \varphi \rangle)^* = \left(\pm i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi^*(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right)^* = \mp i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \frac{\partial \varphi^*(x)}{\partial x} \quad \text{CVD}$$

$$\boxed{\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}$$

rappresentazione dell'operatore $\hat{p}$
nella rappresentazione delle
coordinate

Questo può essere

$$\hat{p} \varphi = \lambda \varphi \quad \text{con } \varphi = e^{ikx} A$$

$$-i\hbar (\lambda k) A e^{ikx} = \hbar k \underbrace{(A e^{ikx})}_{\varphi}$$

per $k > 0$ ho in λ (autovalore) > 0 se scelgo $-i$

Traslazione temporale in MQ

(12)

$$\psi(t+\varepsilon) = \underbrace{\left[1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right]} \psi(t)$$

operatore ω -sino di traslazione

$\Updownarrow$ corrisponde

generatore ω -sino

Il generatore ω -sino della traslazione è l'hamiltoniana

MC

la parte relativa
al generatore ω -sino
nella funzione generatrice

$$\varepsilon H$$

dimensionale
ha dim di
azione

$$\frac{\varepsilon \hat{H}}{[\text{azione}]}$$

$$\psi = \underbrace{(K)}_{\text{complex di modulo 1}} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

complex di modulo 1

MQ

nell'operatore
di traslazione
ho

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$$

Al solito

De Broglie

(13)

$[azione] = \hbar$ costante fond d'azione

$|k| = 1$ il modulo è $\frac{1}{\hbar}$ tutta la grandezza è nelle def di $\hbar$

$k = +i$ per avere onde progressive associate a stati che traslano verso la direzione + dell'asse x
per $p_x > 0$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

equazione Schrödinger

Per particelle libere

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$$

$$\psi = A e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\omega = \frac{\hbar k}{2m} \quad \underline{\omega > 0 \quad k > 0}$$