

La funzione generatrice dei momenti per la
distribuzione gaussiana

$$G(\lambda) = \langle e^{\lambda x} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) e^{\lambda x}$$

dove $p(x)$ è una distribuzione generica con
 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) = 1$ (se $p(x)$ è definita fra $-\infty$ e $+\infty$)

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n$$

se la $p(x)$ ha tutti i momenti posso scrivere
 $\sum$ e $\int$

$$G(\lambda) = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) x^n}_{\text{momento } n\text{-esimo (rispetto a } x=0\text{)}} = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} m_n$$

il momento n -esimo di $p(x)$ è

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) x^n = m_n$$

$$m_n = \left. \frac{d^n G}{d\lambda^n} \right|_0$$

Per la gaussiana
a media nulla.

$$g(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\lambda x}$$

Sappiamo che completando il $\square$ dall'integrale
gaussiano abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{\lambda x} = \sqrt{2\pi\sigma^2} e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$$

e quindi

$$G(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$$

per cui i momenti della gaussiana a media
nulla si ottengono dall'uguaglianza delle
serie

$$G(\lambda) = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} m_n = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda^2\sigma^2}{2} \right)^n$$

vediamo che solo $\neq 0$ solo i momenti pari
per la gaussiana & per

$$\frac{m_{2n}}{(2n)!} = \frac{\sigma^{2n}}{2^n n!}$$

$$m_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sigma^{2n} = (2n-1)!! \sigma^{2n}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots n(n-1)(n-2)} = (2n-1)!! \\ & = \frac{\cancel{2n}(\cancel{2n-1})(\cancel{2n-2})(\cancel{2n-3})\cdots}{\cancel{2n}(\cancel{2n-2})(\cancel{2n-4})\cdots} = (2n-1)(2n-3)\cdots(2n-5)\cdots \end{aligned}$$

7) primi momenti sono

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 \quad \overset{x}{\circ} \cdots \overset{x}{\circ} = \langle x^2 \rangle$$

$$\langle x^3 \rangle = 0$$

$$\langle x^4 \rangle = 3 \cdot 1 \sigma^4$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} \overset{\circ}{x} \cdots \overset{\circ}{x} \quad \overset{\circ}{x} \cdots \overset{\circ}{x} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = \sigma^2 \cdot \sigma^2 \\ \begin{array}{c} \overset{\circ}{x} \cdots \overset{\circ}{x} \quad \overset{\circ}{x} \cdots \overset{\circ}{x} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = \sigma^2 \cdot \sigma^2 \\ \begin{array}{c} \overset{\circ}{x} \cdots \overset{\circ}{x} \quad \overset{\circ}{x} \cdots \overset{\circ}{x} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = \sigma^2 \cdot \sigma^2 \end{array} \right\} 3\sigma^4$$

$$\langle x^5 \rangle = 0$$

$$\langle x^6 \rangle = 5 \cdot 3 \cdot 1 \sigma^6 = 15 \sigma^6 \quad 15 \text{ modi di}$$

Wick's theorem
for dummies

raggruppare a 2 a 2
le 6 x in ballo

E se la media non è nulla?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \mu \text{ valore d'aspettazione}$$

vale la stessa regola ma per i momenti
rispetto a μ

$$\begin{aligned} \langle (x-\mu)^n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (x-\mu)^n = \\ &= \int dy \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} y^n \end{aligned}$$

$$\langle (x-\mu)^{2n} \rangle = (2n-1)!! \sigma^{2n}$$

La funzione generatrice dei cumulanti

$$\phi(\lambda) = \ln G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} c_n$$

cumulante n -esimo

$$c_n = \left. \frac{d^n \phi}{d\lambda^n} \right|_0$$

per la gaussiana

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2$$

esiste solo il cumulante secondo che è $\equiv$ con il
varianza secondo

$$c_2 = \sigma^2 = m_2$$