

Th di Noether

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &\rightarrow \dot{q}'(t) = \dot{q}(t) + \delta\dot{q} = \dot{q} + \left(\frac{d}{dt}\delta q\right) \delta\dot{q} \\ q(t) &\rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q \\ t &\rightarrow t'(t) = t + \delta t\end{aligned}$$

Se l'Azione è invariante sotto la trasformazione dipendente dal tempo allora $\exists$ una quantità conservata.

Supponiamo che

$$S(t,0) = \int_0^t dt' \mathcal{L}(q(t'), \dot{q}(t'), t')$$

$$dS = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

$$dS' = \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t') dt'$$

$$dS' - dS = \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t') dt' - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

hanno le stesse

$$\boxed{\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t') dt' \Rightarrow \delta dS = 0}$$

La variazione delle azione δS infinitesimale

$$\delta S = \delta \mathcal{L} dt + \mathcal{L} \delta(dt)$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t$$

perché ha q che q dip da t

$$\delta dt = dt' - dt = \left(\frac{dt'}{dt} - 1\right) dt = \left[\frac{d}{dt}(t'(t) - t)\right] dt = \left(\frac{d}{dt} \delta t\right) dt$$

maggiore alle eq di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$$

$$\delta dS = \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d}{dt} \delta q \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right] dt$$

$$+ L \left(\frac{d}{dt} \delta t \right) dt = \left(\frac{dQ}{dt} \right) dt$$

che è la derivata totale di

$$\delta dS = \frac{dQ}{dt} dt$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + L \delta t \quad \text{Costante conservata}$$

infatti

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d}{dt} \delta q \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L \left(\frac{d}{dt} \delta t \right)$$

TRASLAZIONE SPAZIALE

$$\delta t = 0 \quad \delta q = a = \text{const (infinitesimo)}$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (a) \xrightarrow{\text{const}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \text{ conservato} \Rightarrow \text{impulso conservato}$$

TRASLAZIONE TEMPORALE

$$t' = t + a \text{ const (sarebbe meglio traslare } t' = t - a)$$

$$\cancel{q(t) = q(t' - a) = q(t') - a \dot{q}}$$

$$\cancel{\delta q = q'(t) - q(t)} \quad \text{trasformare solo de tempo}$$

$$q'(t') = q(t)$$

$$q'(t+a) = q(t) \quad \text{ma anche } q'(t) = q(t-a)$$

$$\delta q = q'(t) - q(t) = q(t-a) - q(t) = -a \dot{q}(t)$$

$$Q = -a \dot{q} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + a \mathcal{L} = -a [p \dot{q} - \mathcal{L}] = -a H$$

La quantità conservata è H

- Meccanica Hamiltoniana

La traslazione finita ha come generatore co-seno e l'impulso questo si vede in meccanica hamiltoniana con la funzione generativa

La traslazione temporale finita ha come generatore co-seno e l'hamiltoniana stessa

$$F(q, P) = qP + \varepsilon P \quad P = \frac{\partial F}{\partial q} = P \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P} = q + \varepsilon$$

il generatore co-seno è P

$$F(q, P) = qP + \varepsilon H$$

il generatore co-seno è H

$$P = \frac{\partial F}{\partial q} = P + \varepsilon \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)_0 \rightarrow P = P - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = q + \varepsilon \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_0 \rightarrow Q = q + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial P}$$

$$\varepsilon = dt$$