Vademecum sull'oscillatore armonico in 1D

L'Hamiltonia dell'oscillatore armonico è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{x}^2}{2}.$$

- Dai teoremi generali sulla particella in una dimensione, possiamo dire che
  1. Lo spettro è limitato inferiormente;
  2. Le energie sono positive;
  3. gli autostati delle enegie sono tutti legati;
  4. Lo spetto è non degenere;
  5. Poiché $[\mathbf{H}, \mathbf{\Pi}] = 0$ gli autostati sono pari o dispari con parità $(-1)^n$
- Si possono introdurre le variabili adimensionali

  $$\hat{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\ell},\ \hat{\pi} = \frac{\mathbf{p}}{m\omega\ell},$$

  e imponendo che

  $$\left[\hat{\xi}, \hat{\pi}\right] = i\mathbf{I}$$

  si ottiene la **lunghezza tipica** dell'oscillatore armonico

  $$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

- Allo stesso modo si possono introdurre gli stati continui adimensionali $|\xi\rangle$

  $$\langle\xi|\xi'\rangle = \delta\left(\xi - \xi'\right) = \delta\left(\frac{1}{\ell}\left(x - x'\right)\right) = \ell\delta\left(x - x'\right) = \ell\left\langle x|x'\right\rangle,$$

  per cui

  $$|\xi\rangle = \sqrt{\ell}\,|x\rangle\,.$$

  In questa base gli elementi di $\hat{\pi}$ sono

  $$\begin{aligned}\langle\xi|\hat{\pi}|\xi'\rangle &= \frac{\ell^2}{\hbar}\langle x|\mathbf{p}|x'\rangle = -i\ell^2\frac{d}{dx}\delta\left(x - x'\right) = \\ &= -i\ell^2\frac{d}{dx}\delta\left(\ell\left(\xi - \xi'\right)\right) = -i\ell\frac{d}{dx}\delta\left(\xi - \xi'\right) = \\ &= -i\frac{d}{d\xi}\delta\left(\xi - \xi'\right).\end{aligned}$$

  Nel passare dalle variabili originali a quelle adimensionali

  $$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\langle\xi|\psi\rangle\,.$$

- Introduciamo gli operatori di **creazione e distruzione** (adimensionali)

  $$\mathbf{x} = \ell\frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{\xi} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger}{\sqrt{2}},$$

  $$\mathbf{p} = i\frac{\hbar}{\ell}\frac{\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{\pi} = i\frac{\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}}{\sqrt{2}},$$

  $$\mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell} - i\frac{\ell}{\hbar}\mathbf{p}\right) = \frac{\hat{\xi} - i\hat{\pi}}{\sqrt{2}},$$

  $$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell} + i\frac{\ell}{\hbar}\mathbf{p}\right) = \frac{\hat{\xi} + i\hat{\pi}}{\sqrt{2}},$$

  che soddisfano la regola di commutazione (operatori bosonici)

  $$\left[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger\right] = \mathbf{I}.$$

- Si definisce l'operatore hermitiano **"numero"**
$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$$
che soddisfa le relazioni
$$[\mathbf{n}, \mathbf{a}] = -\mathbf{a}, \quad \left[\mathbf{n}, \mathbf{a}^\dagger\right] = \mathbf{a}^\dagger.$$
- Ricordiamo (vedere note di Metodi I) che gli autovalori di $\mathbf{n}$ sono i numeri interi
$$\mathbf{n} \left|n\right\rangle = n \left|n\right\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
e che
$$\mathbf{a} \left|n\right\rangle = \sqrt{n} \left|n-1\right\rangle,$$
$$\mathbf{a}^\dagger \left|n\right\rangle = \sqrt{n+1} \left|n+1\right\rangle.$$
- Nei nuovi operatori l'Hamiltoniana si scrive come
$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2}\right),$$
quindi $[\mathbf{H}, \mathbf{n}] = 0$ ossia
$$\mathbf{H} \left|n\right\rangle = E_n \left|n\right\rangle,$$
$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right).$$
- Gli elementi di matrice degli operatori di creazione e distruzione sono, nella posizione
$$\langle x|\mathbf{a}^\dagger|x'\rangle = \delta\left(x - x'\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\ell} - \ell \frac{\partial}{\partial x'}\right),$$
$$\langle x|\mathbf{a}|x'\rangle = \delta\left(x - x'\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\ell} + \ell \frac{\partial}{\partial x'}\right),$$
nella posizione adimensionalizzata
$$\langle \xi|\mathbf{a}^\dagger|\xi'\rangle = \delta\left(\xi - \xi'\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi'}\right),$$
$$\langle \xi|\mathbf{a}|\xi'\rangle = \delta\left(\xi - \xi'\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi'}\right),$$
negli autostati di $\mathbf{n}$
$$\langle n|\mathbf{a}^\dagger|n'\rangle = \sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1},$$
$$\langle n|\mathbf{a}|n'\rangle = \sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}.$$
- Evoluzione temporale degli operatori
$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{a}] = -i\omega\mathbf{a} \Longrightarrow \mathbf{a}(t) = e^{-i\omega t}\mathbf{a},$$
$$\dot{\mathbf{a}}^\dagger = \frac{i}{\hbar} \left[\mathbf{H}, \mathbf{a}^\dagger\right] = i\omega\mathbf{a}^\dagger \Longrightarrow \mathbf{a}^\dagger(t) = e^{-i\omega t}\mathbf{a}^\dagger.$$
- Funzione d'onda dello stato fondamentale
$$\begin{aligned}
\langle \xi|\mathbf{a}|0\rangle &= \int d\xi' \; \langle \xi|\mathbf{a}|\xi'\rangle \langle \xi'|0\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi' \, \delta\left(\xi - \xi'\right) \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi'}\right) \psi_0\left(\xi'\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi\psi_0(\xi) + \psi_0'(\xi)\right) = 0,
\end{aligned}$$
ossia
$$\xi\psi_0(\xi) + \psi_0'(\xi) = 0,$$
la cui soluzione normalizzata è una funzione gaussiana
$$\psi_0(\xi) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

- Costruzione ricorsiva degli stati eccitati:

$$\begin{aligned}
\langle\xi|\mathbf{a}^{\dagger}|n\rangle &= \int d\xi' \, \langle\xi|\mathbf{a}^{\dagger}|\xi'\rangle \langle\xi'|n\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi' \, \delta\left(\xi-\xi'\right) \left(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi'}\right) \psi_n\left(\xi'\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi\psi_n\left(\xi\right) - \psi_n'\left(\xi\right)\right).
\end{aligned}$$

  Ne deriva la legge di ricorrenza

$$\psi_{n+1}\left(\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\left(n+1\right)}} \left(\xi\psi_n\left(\xi\right) - \psi_n'\left(\xi\right)\right).$$

- Partendo dallo stato fondamentale, il primo stato eccitato è

$$\psi_1\left(\xi\right) \propto \xi\psi_0\left(\xi\right),$$

  il secondo

$$\psi_2\left(\xi\right) \propto \left(a_2\xi^2 + b_2\right)\psi_0\left(\xi\right),$$

  il terzo

$$\psi_2\left(\xi\right) \propto \left(a_3\xi^3 + b_3\xi\right)\psi_0\left(\xi\right),$$

  e così via. Si vede quindi che la struttura delle funzioni d'onda è la seguente

$$\psi_n\left(\xi\right) = \alpha_n P_n\left(\xi\right) e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

  dove P_n è un polinomio di grado n. Utilizzando la legge di ricorrenza si ottiene

$$\alpha_{n+1}P_{n+1}\left(\xi\right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\left(n+1\right)}} \left(2\xi P_n\left(\xi\right) - P_n'\left(\xi\right)\right) e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

  ossia

$$\alpha_{n+1}P_{n+1}\left(\xi\right) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\left(n+1\right)}} \left(2\xi P_n\left(\xi\right) - P_n'\left(\xi\right)\right),$$

  se impongo che

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\left(n+1\right)}}$$

  si ottiene

$$P_{n+1}\left(\xi\right) = 2\xi P_n\left(\xi\right) - P_n'\left(\xi\right),$$

  che è soddisfatta dai polinomi di Hermite $H_n\left(\xi\right)$ con $\alpha_n = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2^n n!}}$. Per cui

$$\psi_n\left(\xi\right) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\xi\right) e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

$$\psi_n\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\psi_n\left(\xi\right) = \left(\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}\ell}\right)^{\frac{1}{2}} H_n\left(\frac{x}{\ell}\right) e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}$$

Polinomi di Hermite

- Intervallo: $[-\infty, \infty]$
- Funzione peso: $w = e^{-x^2}$
- Funzione generatrice: $g(t,x) = e^{-t^2+2xt}$
- Formula di Rodriguez: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$
- Ortogonalità: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}$
- Ricorrenza: $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$
- Valori espliciti dei primi polinomi:

$$\begin{aligned}
H_0 &= 1 \\
H_1 &= 2x \\
H_2 &= 4x^2 - 2 \\
H_3 &= 8x^3 - 12x \\
H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12
\end{aligned}$$