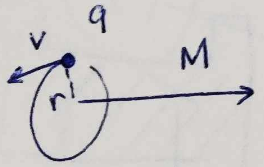
Mom Angolare Intrinseco SPIN

Rivelazione del momento angolare
↳ Interazione momento angolare di una particella carica
con Campo Magnetico ext

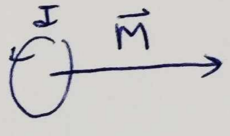


una carica animata di velocità v produce una Intensità di corrente

$$I = q/T \leftarrow \text{periodo del moto}$$

$$I = \frac{q}{2\pi}\omega \quad \text{nel moto circolare} \quad \omega = \frac{v}{r}$$

il Momento magnetico in una corrente in moto circolare è



$$\vec{M} = I \underbrace{S}_{\text{superficie}} \hat{n} = \frac{q}{2\cancel{\pi}} \frac{v}{\cancel{r}} \cancel{\pi} r^2 \hat{n}$$

$$\boxed{M = \frac{q}{2m} L} \qquad \boxed{\vec{M} \,//\, \vec{L}}$$

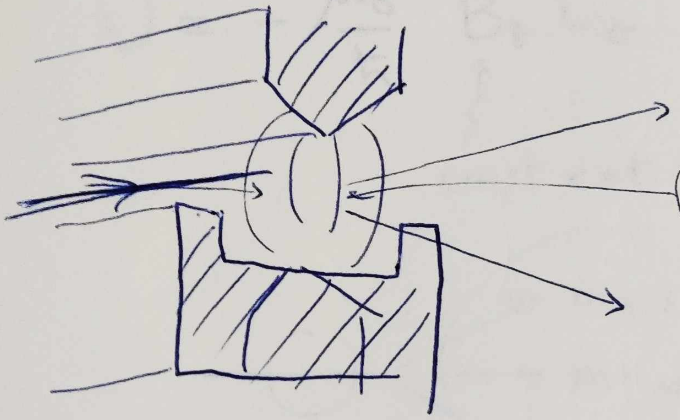
l'energia di interazione con un campo ext B

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\frac{q}{2m} B_z L_z \quad \text{se } B // z$$

$$U = -\underbrace{\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)}_{\text{Magnetone di Bohr } \mu_B} \frac{1}{\hbar} B_z L_z \qquad \Rightarrow \text{effetto Nardone}$$

- Modifiche ai livelli atomici
- Deflessione in un campo magnetico modulato (non omogeneo)

Stern-Gerlach



Forza proporz al momento magnetico lungo l'asse z

Splitting in 2 fasci $\Rightarrow$ $l = 1/2$

$$H = H_0 + U$$

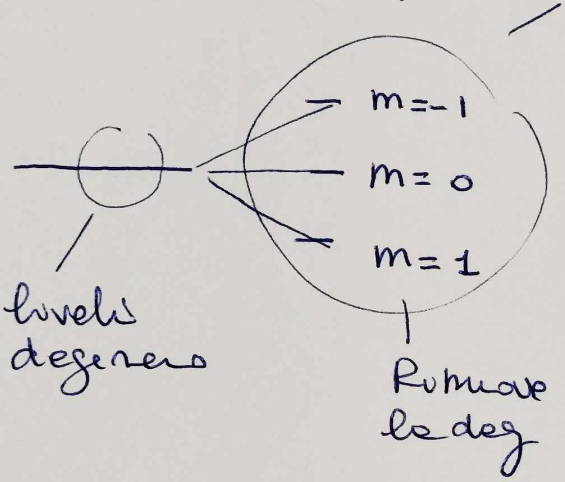
livelli

Modifica dei livelli

$$U = -\frac{\mu_B}{\hbar} B_z \hat{L}_z$$

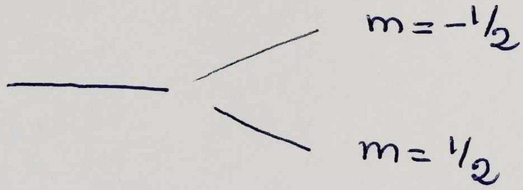
const ext

SPLITTING



$\ell = 1$

numero ~~pari~~ di livelli dispari



$\ell = 1/2$

numero pari di livelli

$\Downarrow$

l semintero

Splitting anomalo

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L} + g\vec{S}$$

Spin elettronico!

mom angolare

fattore giromagn ~ 2

anche se $\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{S} \neq 0$ proprietà intrinseca

VETTORIALE!

IFT 25/26/27 Nov 2020

Spin

Grado di lib ulteriore associato ad una quantità vettoriale ⇒ Momento angolare intrinseco o spin

Lo stato lo possiamo rappr nel CSCO

$$\underset{\text{coord}}{|\vec{r}\rangle} \otimes \underset{\text{spin}}{|s, s_z\rangle}$$

$s \uparrow \, \ell$, $s_z \uparrow \, m$

Lo spin come coordinate discrete

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{s_z=-s}^{s} \int \psi(\vec{r}, s_z)\, |\vec{r}\rangle \otimes |s, s_z\rangle \, d^3\vec{r}}$$

$|\psi(\vec{r}, s_z)|^2$ → densità di prob
prob di trovare il sist quant
in $\vec{r}$
con componente z dello spin pari a s_z

La corrente (?) → esercizio

$s = 1/2$ spinori di Pauli

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \psi(\vec{r}, 1/2) \\ \psi(\vec{r}, -1/2) \end{pmatrix} \quad 2 \text{ componenti}$$

Qualsiasi operatore che agisce solo sul grado di lib spinoriale si esprime mediante matrici di pauli

$$A = \alpha_0 \mathbb{1} + \alpha_1 \hat{\sigma}_1 + \alpha_2 \hat{\sigma}_2 + \alpha_3 \hat{\sigma}_3$$

Un qualsiasi valor medio si esprime come

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = \int d^3\vec{r} \sum_{s_z} (\varphi^*(\vec{r}, 1/2) \; \varphi^*(\vec{r}, -\tfrac{1}{2})) \begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi(r\, 1/2 \\ \psi(r, -1/2 \end{pmatrix}$$

1) se A non coinvolge lo spin p. es l'impulso

$$\langle \varphi | \vec{p} | \psi \rangle = \int d^3\vec{r} (\varphi^*(\vec{r}\, 1/2) \; \varphi^*(r, -\tfrac{1}{2}))(-i\hbar \vec{\nabla}) \mathbb{1} \begin{pmatrix} \psi(r\, \frac{1}{2}) \\ \psi(r, -\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \int d^3\vec{r} \; \varphi(\vec{r}\, 1/2)(-i\hbar \vec{\nabla} \psi(r\, 1/2)) +$$

$$+ \int d^3 r \; \varphi(\vec{r}^* -1/2)(-i\hbar \nabla (\psi(r - 1/2))$$

2) se A è un operatore solo sullo spin

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = \int d^3 r (\varphi^* \; \varphi^*) \begin{bmatrix} a_{\uparrow\uparrow} & a_{\uparrow\downarrow} \\ a_{\downarrow\uparrow} & a_{\downarrow\downarrow} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = \sum_{-s}^{s}{}_{s_z} \sum_{-s}^{s}{}_{s_z'} \int \varphi^*(r\, s_z)\, A_{s_z s_z'}\, \psi(r, s_z')\, d\vec{r}$$

↳ entanglement spin coord

Le matrici di pauli

Rotazione della coordinata di spin

$$e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{S}}\, \psi(s_z) = \psi(s_z')$$

↑ $R s_z$

↑ non sono rotazioni a 3d!

Rotazione dello stato di spin

- ricordo

$$e^{\frac{i}{\hbar}ap}\psi(x) = \psi(x+a)$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}ap}|x\rangle = |x-a\rangle$$

per cui se voglio $|x\rangle \to |x+a\rangle$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}ap}|x\rangle = |x+a\rangle \leftarrow \text{TRASLAZIONE STATO}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}ap}|\psi\rangle = |\psi'\rangle \neq |T\psi\rangle$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{S}}|\psi\rangle = |R\psi\rangle \quad \text{stato ruotato}$$

Lo spinore di Pauli come stato entangled di spin coordinate

Il fatto che la base scelta per esprimere lo stato siano base prodotto non significa che lo stato sia uno stato prodotto

$$|\psi\rangle = |\varphi_{coord}\rangle \otimes |\chi_{spin}\rangle$$

stato prodotto è in fatti uno stato di questo tipo

$$|\psi\rangle \doteq \psi(\vec{r}) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$ indipendenti dalle coordinate

in uno stato prodotto le densità di probabilità di coordinate e spin è

dens prob posizione

$$|\psi(\vec{r}, \tfrac{1}{2})|^2 = |\psi(\vec{r})|^2 |\chi_1|^2$$ prob spin

le probabilità è il prodotto nel caso di eventi indipendenti

spin e coordinate sono misure distribuite in maniera indipendente

Uno spinore generico descrive uno stato entangled spin coordinate

$$|\psi(\vec r, 1/2)|^2 \neq P(\vec r)\, P(s=1/2)$$

in uno stato prodotto la correlazione fra spin e coordinate è assente

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Correlazione fra 2 variabili } A\,B \text{ è} \\ \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle = C \\ \text{se } A \text{ e } B \text{ sono scorrelate allora} \\ \langle AB\rangle \simeq \langle A\rangle\langle B\rangle \text{ e } C=0\end{array}}$$

Consideriamo il valor medio

$$\langle \underbrace{\vec r}_{\text{coord}} \cdot \underbrace{\hat S_z}_{\text{spin}} \rangle - \langle \vec r\rangle\langle \hat S_z\rangle = C(\vec r, s_z)$$

per uno stato prodotto

$$\langle\psi|\vec r\cdot\hat S_z|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}\int d^3\vec r\, (\chi_1^*\ \chi_2^*)\,\psi^*(r)\, r \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\psi(r)\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\underbrace{\int d^3r\, |\psi(r)|^2\, \vec r}_{\langle\vec r\rangle}\ \underbrace{(\chi_1^*\ \chi_2^*)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}}_{\langle\hat S_z\rangle}$$

quindi $C=0$

in uno stato generico

$$\langle \vec{r} \cdot \hat{S}_z \rangle = \frac{\hbar}{2}\int d^3r \, (\psi_\uparrow^* \, \psi_\downarrow^*) \, \vec{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\int d^3\vec{r} \left(|\psi_\uparrow(r)|^2 - |\psi_\downarrow(r)|^2 \right) \vec{r}$$

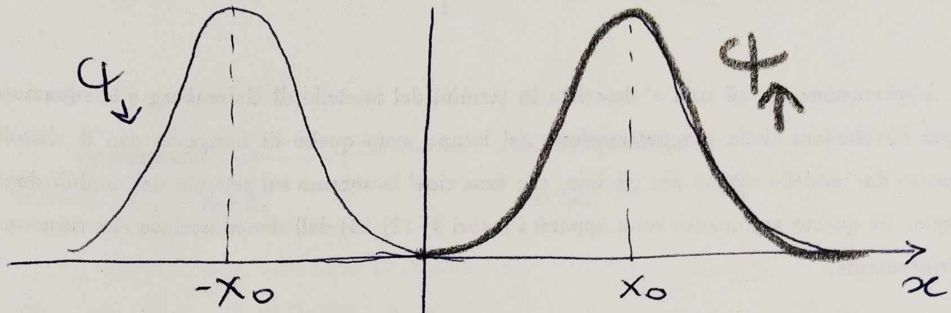
mentre invece

$$\langle \vec{r} \rangle = \int d^3\vec{r} \left(|\psi_\uparrow(r)|^2 + |\psi_\downarrow(r)|^2 \right) \vec{r}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2}\int d^3\vec{r} \left(|\psi_\uparrow(r)|^2 - |\psi_\downarrow(r)|^2 \right)$$

1.

$\boxed{\text{Entanglement} \Rightarrow \text{Correlations}}$



$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x) \\ \psi_\downarrow(x) \end{pmatrix}$$

$$\psi_\uparrow(x) = \left[\frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

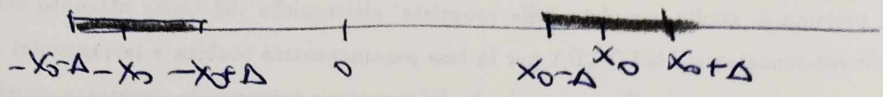
normalizzazione

$$\psi_\downarrow(x) = \left[\frac{e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Una misura di spin nel punto $x = x_0$ darà con alta probabilità il valore $S_z = +\frac{\hbar}{2}$

Una misura di spin nel punto $x = -x_0$ darà con alta prob il valore $S_z = -\hbar/2$

Se il misuratore ha una finestra di acquisizione nelle coordinate pari a $\pm\Delta$



le probabilità di ottenere $s_z = +\hbar/2$ in un intorno $\pm\Delta$ intorno a x_0 è

$$P_\uparrow^{(x_0)} = \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx\, |\psi_\uparrow(x)| \gg \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx\, |\psi_\downarrow(x)| = P_\downarrow(x_0)$$

possiamo quantificare questo con una funzione di correlazione

$$\langle \hat{X}\hat{S}_z\rangle - \langle \hat{X}\rangle\langle \hat{S}_z\rangle =$$

$$= \underbrace{\int dx\, (\psi_\uparrow^*, \psi_\downarrow^*)\, x \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}}_{(a)} -$$

$$- \underbrace{\int dx\, (\psi_\uparrow^* \psi_\downarrow^*)\, x \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}}_{(b)} \underbrace{\int dx\, (\psi_\uparrow^* \psi_\downarrow^*) \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}}_{(c)}$$

a) $\int dx\, x \left[|\psi_\uparrow(x)|^2 - |\psi_\downarrow(x)|^2 \right] \frac{\hbar}{2} =$

$= \left[x_0 - (-x_0) \right] \frac{\hbar}{2} = \hbar x_0$

1

b) $\int dx\, x\left(|\psi_\uparrow(x)|^2 + |\psi_\downarrow(x)|\right) = x_0 - x_0 = 0$

c) $\int dx\, \left(|\psi_\uparrow(x)|^2 - |\psi_\downarrow(x)|^2\right) = 0$

~~so t~~ equnondo

$\langle \hat{X}\hat{S}_z\rangle - \langle\hat{X}\rangle\langle\hat{S}_z\rangle = \langle\hat{X}\hat{S}_z\rangle = \hbar x_0 > 0$

ho correlazione fra spin e coordinata!

Adesso considero uno stato prodotto

$$|\psi\rangle = \psi(x)\begin{pmatrix}\chi_\uparrow\\ \chi_\downarrow\end{pmatrix}$$

$$P_\uparrow(x_0) = \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx\, |\psi(x)|^2 |\chi_\uparrow|^2$$

$$P_\downarrow(x_0) = \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx\, |\psi(x)|^2 |\chi_\downarrow|^2$$

se $\chi_\uparrow \neq \chi_\downarrow$ ho una diversità che non da correlaz

infatti supponendo che la $\psi(x)$ sia tale che

$$\langle x\rangle = \int dx\, |\psi(x)|^2 \underbrace{\left(|\chi_\uparrow|^2 + |\chi_\downarrow|^2\right)}_{=1} x = 0$$

le funzione di correlazione viene

$$\int dx\, \psi^*(x)\,(\chi_\uparrow^*, \chi_\downarrow^*)\begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ \chi_\downarrow \end{pmatrix}\psi(x)\, x$$

$$= \int dx\, |\psi(x)|^2 x \left[\frac{\hbar}{2}\left(|\chi_\uparrow|^2 - |\chi_\downarrow|^2\right)\right] = 0$$

non c'è correlazione fra spin e coordinate

Uno stato prodotto in generale non dà luogo a correlazioni esempio

se

$$\psi(x,y) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)$$

$$\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle =$$

$$= \left(\int dx\, |\psi_1(x)|^2 x\right)\left(\int dy\, |\psi_2(y)|^2 y\right)$$

$$- \left(\int dx\, |\psi_1(x)|^2 x\right)\int dy\, |\psi_2(y)|^2 \times$$

$$\times \left(\int dy\, |\psi_2(y)|^2 y\right)\int dx\, |\psi_1(x)|^2 \text{ — normalizz}$$

$$= 0$$