

0.0.1 Operatori di creazione e distruzione

In uno spazio astratto, gli operatori possono essere definiti anche senza darne una rappresentazione in termini di matrice. Alcuni esempi vengono dalla meccanica quantistica: gli operatori di creazione e distruzione fermionici e bosonici, e gli operatori a scala del momento angolare.

0.0.1.1 Operatori fermionici

Gli operatori $\mathbf{c}$ (di distruzione) e $\mathbf{c}^\dagger$ (di creazione) fermionici, si definiscono a partire dalle relazioni di anticommutazione

$$\{\mathbf{c}, \mathbf{c}^\dagger\} = \mathbf{I},$$

$$\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\} = \{\mathbf{c}^\dagger, \mathbf{c}^\dagger\} = 0, \quad \implies \quad \mathbf{c}\mathbf{c} = \mathbf{c}^\dagger\mathbf{c}^\dagger = 0.$$

Da essi si costruisce l'operatore hermitiano

$$\mathbf{n}_f = \mathbf{c}^\dagger\mathbf{c} = \mathbf{n}_f^\dagger,$$

che soddisfa le relazioni

$$[\mathbf{n}_f, \mathbf{c}] = \mathbf{c}^\dagger\mathbf{c}\mathbf{c} - \mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger\mathbf{c} = -(\mathbf{I} - \mathbf{c}^\dagger\mathbf{c})\mathbf{c} = -\mathbf{c},$$

$$[\mathbf{n}_f, \mathbf{c}^\dagger] = [\mathbf{c}, \mathbf{n}_f]^\dagger = (-[\mathbf{n}_f, \mathbf{c}])^\dagger = \mathbf{c}^\dagger.$$

L'operatore $\mathbf{n}_f$ è idempotente, ossia

$$\mathbf{n}_f^2 = \mathbf{c}^\dagger\mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger\mathbf{c} = \mathbf{c}^\dagger(\mathbf{I} - \mathbf{c}^\dagger\mathbf{c})\mathbf{c} = \mathbf{c}^\dagger\mathbf{c} = \mathbf{n}_f,$$

per cui il suo polinomio di Cayley-Hamilton è

$$\mathbf{n}_f^2 - \mathbf{n}_f = 0,$$

e gli autovalori sono quindi

$$\lambda = 0, 1,$$

con autovettori

$$\mathbf{n}_f |0\rangle = 0 |0\rangle,$$

$$\mathbf{n}_f |1\rangle = |1\rangle,$$

ossia, in maniera compatta:

$$\mathbf{n}_f |n\rangle = n |n\rangle.$$

In meccanica quantistica, questi autovalori sono associati alla presenza o meno di una particella fermionica. Gli autovettori sono scelti normalizzati

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1.$$

Per vedere come operano gli operatori di creazione e distruzione sugli autovettori di $\mathbf{n}_f$ osserviamo che

$$\mathbf{n}_f\mathbf{c}^\dagger |n\rangle = \mathbf{c}^\dagger(\mathbf{I} + \mathbf{n}_f) |n\rangle = (1 + n)\mathbf{c}^\dagger |n\rangle$$

quindi $\mathbf{c}^\dagger |n\rangle$ è ancora autovettore di $\mathbf{n}_f$ con autovalore $(1 + n)$. Questa condizione è soddisfatta solo se $n = 0$ perché non esistono autovalori maggiori di 1. Quindi $\mathbf{c}^\dagger |n\rangle \propto \delta_{n,0} (1 + n) |n + 1\rangle$, ossia

$$\mathbf{c}^\dagger |0\rangle \propto |1\rangle,$$

$$\mathbf{c}^\dagger |1\rangle = 0.$$

Allo stesso modo

$$\mathbf{n}_f\mathbf{c} |n\rangle = \mathbf{c}(-\mathbf{I} + \mathbf{n}_f) |n\rangle = (n - 1)\mathbf{c} |n\rangle,$$

quindi $\mathbf{c} |n\rangle$ è ancora autovettore di $\mathbf{n}_f$ con autovalore $(n - 1)$. Questa condizione è soddisfatta solo se $n = 1$ perché non esistono autovalori minori di 0. Quindi $\mathbf{c} |n\rangle \propto \delta_{n,1} (n - 1) |n - 1\rangle$, ossia

$$\mathbf{c} |1\rangle \propto |0\rangle,$$

$$\mathbf{c} |0\rangle = 0.$$

$$\langle 1|\mathbf{c}^\dagger\mathbf{c}|1\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$$

$$\langle 0|\mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger|0\rangle = \langle 0|(\mathbf{I} - \mathbf{n}_f)|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1.$$

Riassumendo

$$\begin{aligned}\mathbf{c} |1\rangle &= |0\rangle, \\ \mathbf{c}^\dagger |0\rangle &= |1\rangle.\end{aligned}$$

Gli operatori fermionici posso essere rappresentati in termini di matrici di Pauli come

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_f &= \frac{\mathbf{I} - \sigma_3}{2}, \\ \mathbf{c} &= \sigma_+, \\ \mathbf{c}^\dagger &= \sigma_-.\end{aligned}$$

0.0.1.2 Operatori bosonici

In maniera analoga si possono definire degli operatori a partire dalla regola di commutazione

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{I},$$

con l'operatore numero bosonico

$$\mathbf{n}_b = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{n}_b^\dagger,$$

che soddisfa le seguenti regole di commutazione

$$\begin{aligned}[\mathbf{n}_b, \mathbf{a}] &= \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = -[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] \mathbf{a} = -\mathbf{a}, \\ [\mathbf{n}_b, \mathbf{a}^\dagger] &= \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{a}^\dagger [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{a}^\dagger.\end{aligned}$$

Di nuovo, per trovare gli autovalori di $\mathbf{n}_b$

$$\mathbf{n}_b |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle,$$

osserviamo che

$$\mathbf{n}_b \mathbf{a}^\dagger |\psi\rangle = \mathbf{a}^\dagger (\mathbf{I} + \mathbf{n}_b) |\psi\rangle = (1 + \lambda) \mathbf{a}^\dagger |\psi\rangle$$

quindi $\mathbf{a}^\dagger |\psi\rangle$ è ancora autovettore di $\mathbf{n}_b$ con autovalore $(1 + \lambda)$. Allo stesso modo si vede che

$$\mathbf{n}_b \mathbf{a} |\psi\rangle = \mathbf{a} (-\mathbf{I} + \mathbf{n}_b) |\psi\rangle = (\lambda - 1) \mathbf{a} |\psi\rangle,$$

ossia $\mathbf{a} |\psi\rangle$ è ancora autovettore di $\mathbf{n}_b$ con autovalore $(\lambda - 1)$.

Inoltre

$$\|\mathbf{a} |\psi\rangle\|^2 = \langle \psi | \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{n}_b | \psi \rangle = \lambda \langle \psi | \psi \rangle \geq 0.$$

Ne deriva che gli autovalori di $\mathbf{n}_b$ sono positivi. Inoltre, essi devono anche essere interi: se infatti esistesse un autovettore $|\bar{\psi}\rangle$ con autovalore $\bar{\lambda} = n + \delta$ (con n intero e $0 < \delta < 1$), allora si potrebbe applicare ad esso $n + 1$ volte l'operatore di distruzione

$$\mathbf{n}_b (\mathbf{a}^{n+1} |\bar{\psi}\rangle) = (\bar{\lambda} - 1)(\bar{\lambda} - 2) \dots (\delta - 1) (\mathbf{a}^{n+1} |\bar{\psi}\rangle),$$

ottenendo l'autovettore $(\mathbf{a}^{n+1} |\bar{\psi}\rangle)$ con autovalore negativo $(\bar{\lambda} - 1)(\bar{\lambda} - 2) \dots (\delta - 1) < 0$, contraddicendo quanto detto prima. Quindi $\delta = 0$ come da tesi. Inoltre, l'autovalore più piccolo è necessariamente pari a 0. Infatti se l'autovalore minimo fosse $n > 0$ con autovettore $|n\rangle$, si potrebbe applicare ad esso l'operatore di distruzione ottenendo l'autovettore $\mathbf{a} |n\rangle$ con autovalore $n - 1 < n$. Quindi $n_{min} = 0$.

Possiamo indicare gli autovettori di $\mathbf{n}_b$ come $|n\rangle$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{n} |n\rangle = n |n\rangle.$$

$$\mathbf{a}^\dagger |n\rangle = c_1 |n + 1\rangle,$$

$$\langle n | \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger | n \rangle = |c_1|^2 \langle n + 1 | n + 1 \rangle = |c_1|^2 = \langle n | (\mathbf{I} + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}) | n \rangle = n + 1,$$

ossia

$$|c_1| = \sqrt{n + 1}.$$

Allo stesso modo

$$\mathbf{a} |n\rangle = c_2 |n - 1\rangle,$$

$$\langle n | \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} | n \rangle = |c_2|^2 \langle n - 1 | n - 1 \rangle = |c_2|^2 = n,$$

$$|c_2| = \sqrt{n}.$$

Riassumendo

$$\mathbf{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n + 1} |n + 1\rangle,$$

$$\mathbf{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n - 1\rangle.$$