Esercitazione 02

18 ottobre 2024

Riassunto sul pacchetto gaussiano

Data una distribuzione di probabilità gaussiana per la posizione di una particella quantistica

$$g(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}},$$

la più generica funzione d'onda a essa associata è

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = e^{i\varphi(x)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = e^{i\varphi(x)}\sqrt{g(x)},$$

dove $\varphi(x)$ è una qualsiasi funzione di x. Tale fase non cointribuisce al calcolo dei valori medi di tutte le funzioni di $\mathbf{x}$ infatti i valori medi

$$\langle \mathbf{x}^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\psi(x)|^2 x^m,$$

non sono altro che i momenti della $g(x)$. In particolare

$$\langle \mathbf{x} \rangle = x_0,$$

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle^2 = \sigma^2.$$

La fase $\varphi(x)$ invece appare nel calcolo dei valori medi delle funzioni di $\mathbf{p}$, vediamo ad esempio

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p} \rangle &= \langle \psi|\mathbf{p}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx dx'\ \langle\psi|x\rangle \langle x|\mathbf{p}|x'\rangle \langle x'|\psi\rangle = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx dx'\ \psi^*(x) \left(-i\hbar\delta(x-x')\frac{d}{dx'}\right)\psi(x') = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x) = \\
&= -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\varphi(x)}\sqrt{g(x)}\left(i\varphi'(x)e^{i\varphi(x)}\sqrt{g(x)} - e^{i\varphi(x)}\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\right) = \\
&= \hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x)\varphi'(x).
\end{aligned}$$

Nel caso in cui $\varphi = const$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = 0.$$

Nel caso in cui $\varphi = kx$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \hbar k.$$

Il calcolo delle medie delle potenze di $\mathbf{p}$ si può eseguire in maniera analoga

$$\langle \mathbf{p}^n \rangle = (-i\hbar)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\frac{d^n}{dx^n}\psi(x).$$

Può essere utile esprimere lo stato nella base degli impulsi eseguendo una trasformata di Fourier della funzione d'onda

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\frac{xp}{\hbar}}\psi(x) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\left(\frac{xp}{\hbar}-\varphi(x)\right)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

Nel caso in cui $\varphi(x) = kx$ si ha

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\frac{x}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-i\frac{(s+x_0)}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{s^2}{4\sigma^2}} \\
&= \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{\hbar}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{-i\frac{x_0}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}},
\end{aligned}$$

corrispondente anch'essa ad una distribuzione di probabilità gaussiana

$$|\phi(p)|^2 = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\hbar} e^{-\frac{2\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}}.$$

In questa rappresentazione si possono facilmente calcolare i valori medi delle potenze di $\mathbf{p}$ come i momenti della distribuzione

$$\langle \mathbf{p}^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, p^n \left|\phi(p)\right|^2,$$

per cui troviamo di nuovo

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \hbar k.$$

Si ricava immediatamente la varianza di $\mathbf{p}$ che è

$$\left\langle \mathbf{p}^2 \right\rangle - \langle \mathbf{p} \rangle^2 = \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2},$$

e da questa possiamo verificare la **relazione di indeterminazione** per posizione/quantità di moto

$$\sigma\sigma_p = \frac{\hbar}{2}.$$

Dinamica

Evoluzione nella rappresentazione di Schroedinger

In rappresentazioe di Schroedinger gli operatori non evolvono (ma possono dipendere esplicitamente dal tempo), mentre gli stati evolvono secondo l'equazione di Schroedinger. Consideriamo un sistema conservativo con $\mathbf{H}$ indipendente dal tempo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = \mathbf{H}\left|\psi(t)\right\rangle.$$

Lo stato evoluto si ottiene applicando allo stato iniziale l'operatore di evoluzione temporale

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \mathbf{U}(t)\left|\psi(0)\right\rangle,$$

il quale soddisfa l'equazione differenziale

$$i\hbar\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{U}(t),$$

con condizione iniziale $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$. La soluzione dell'equazione è

$$\mathbf{U}(t) = e^{-i\frac{\mathbf{H}}{\hbar}t}.$$

- L'operatore di evoluzione temporale è unitario

  $$\mathbf{U}^\dagger(t) = e^{i\frac{\mathbf{H}}{\hbar}t} = \mathbf{U}^{-1}(t),$$

  mantiene quindi la normalizzazione e preserva i prodotti scalari

  $$\left\langle \psi(t) \middle| \eta(t) \right\rangle = \left\langle \psi(0) \right| \mathbf{U}^\dagger(t)\,\mathbf{U}(t) \left| \eta(0) \right\rangle = \left\langle \psi(0) \middle| \eta(0) \right\rangle.$$

- Per tempi infinitesimi

  $$\mathbf{U}(dt) = \mathbf{I} - i\frac{\mathbf{H}}{\hbar}dt.$$

  Quindi $\mathbf{H}$ è il generatore infinitesimo delle traslazioni temporali.

- Possiamo scrivere l'evoluzione temporale sfruttando la scomposizione in autostati dell'energia ottenuti come soluzione dell'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo

  $$\mathbf{H}\left|E_n\right\rangle = E_n\left|E_n\right\rangle.$$

  Gli autostati di $\mathbf{H}$ sono **stati stazionari** (evolvono soltanto per un fattore di fase)

  $$\left|E_n\right\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\left|E_n\right\rangle.$$

  Nella base degli autostati di $\mathbf{H}$, lo stato si scrive come

  $$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_n c_n(t)\left|E_n\right\rangle,$$

  $$\begin{aligned}\left|\psi(t)\right\rangle &= \mathbf{U}(t)\left|\psi(0)\right\rangle = \sum_n c_n(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t}\left|E_n\right\rangle = \\ &= \sum_n c_n(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\left|E_n\right\rangle,\end{aligned}$$

  dove i coefficienti dipendono dal tempo

Misura proiettiva

Si consideri un operatore Herminitiano $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, la sua equazione agli autovalori è

$$(\mathbf{A} - a_n \mathbf{I}) |n_k\rangle = 0.$$

Ad ogni autovalore a_n con degenerazione d_n, è associato un autospazio M_n di dimensione d_n e un proiettore su di esso, dato da

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{d_n} |n_k\rangle \langle n_k| .$$

Se il sistema fisico si trova nello stato $|\psi\rangle$ una misura dell'osservabile associata ad $\mathbf{A}$ comporta che:

- I possibili risultati sono gli autovalori di $\mathbf{A}$.
- La probabilità di ottenere come risultato a_n è pari a $p(a_n) = \langle\psi|\Pi_n|\psi\rangle$.
- Dopo la misura lo stato si riduce alla sua proiezione sull'autospazio corrispondente al risultato

$$|\psi\rangle \to |\psi_f\rangle = \Pi_n |\psi\rangle .$$

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Se due stati sono ortogonali al tempo $t = 0$ lo saranno anche al tempo $t > 0$? Discutere il risultato.

Sol: L'evoluzione temporale si ottiene applicando allo stato inizale un'operatore unitario

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t) |\psi(0)\rangle ,$$

per cui se due stati sono inizialmente ortogonali

$$\langle\psi_1(0)|\psi_2(0)\rangle = 0,$$

allora lo sono a tutti i tempi

$$\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(0)|\mathbf{U}^\dagger(t)\mathbf{U}(t)|\psi_2(0)\rangle = \langle\psi_1(0)|\mathbf{I}|\psi_2(0)\rangle = \langle\psi_1(0)|\psi_2(0)\rangle = 0.$$

Esercizio 2. Consideriamo uno stato quantistico con due stati con Hamiltoniana, nella base $|1\rangle$, $|2\rangle$, data dalla matrice

$$\mathbf{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare gli autostati di $\mathbf{H}$.
2. Determinare l'operatore di evoluzione temporale $e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathbf{H}t}$.
3. Dato lo stato iniziale $|\psi(0) = |1\rangle\rangle$ e l'osservabile

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolare la probabilità, al tempo $t > 0$ generico, che una misura di $\mathbf{O}$ dia come risultato 2.

Sol:

1. L'Hamiltoniana è

$$\mathbf{H} = \hbar\omega_0\sigma_1,$$

quindi ha autovalori $E_\pm = \pm\hbar\omega_0$ e autovettori

$$|\pm\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

2. L'opertore di evoluzione è

$$e^{-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}} = \mathbf{I}\cos\omega_0 t - i\sigma_1 \sin\omega_0 t.$$

3. L'evoluzione dello stato iniziale è
$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = \cos\omega_0 t\,|1\rangle - i\sin\omega_0 t\,|2\rangle\,.$$
L'osservabile $\mathbf{O}$ è diagonale nella base canonica, per cui la probabilità di ottenere 2 è
$$p_2 = \sin^2\omega_0 t.$$

Esercizio 3. Evoluzione del pacchetto gaussiano. Data la funzione d'onda di una particella libera
$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = e^{ikx}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sigma}}e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} = e^{ikx}\sqrt{g(x)},$$
studiarne l'evoluzione temporale.

Sol: Ricordiamo che nello spazio degli impulsi la funzione d'onda è
$$\phi(p) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{\hbar}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}},$$
tramite essa possiamo esprimere l'evoluzione temporale
$$\begin{aligned}
\langle x|e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m\hbar}t}|\psi\rangle &= \int dp\,\langle x|e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m\hbar}t}|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \\
&= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar\sqrt{\pi}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}}\int dp\,e^{i\frac{px}{\hbar}}e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}t}e^{-\frac{\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{imx^2-2k(\hbar kt-2mx)\sigma^2}{2\hbar t-4im\sigma^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\left(imx^2-2k(\hbar kt-2mx)\sigma^2\right)\left(2\hbar t+4im\sigma^2\right)}{4\hbar^2t^2+16m^2\sigma^4}} = \\
&= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{i\alpha(t)}e^{-\frac{x^2+\frac{k\hbar t}{m^2}(\hbar kt-2mx)}{4\left(\sigma^2+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2\sigma^2}\right)}} \\
&= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{i\alpha(t)}e^{-\frac{\left(x-\frac{k\hbar t}{m}\right)^2}{4\left(\sigma^2+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2\sigma^2}\right)}}
\end{aligned}$$
Il pacchetto rimane gaussiano, il suo picco si sposta con velocità $v = \frac{k\hbar}{m}$ e la varianza aumenta con il quadrato del tempo.

Esercizio 4. Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ un operatore osservabile con una base completa di autostati $|\phi_n\rangle$ con autovalori a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Uno stato generico normalizzato è dato da
$$|\psi\rangle = N\left(3|\psi_1\rangle - 4i|\psi_2\rangle\right),$$
con $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ ortonormali. Trovare N e la probabilità P_4 che una misura di $\mathbf{A}$ dia a_4, prima nel caso in cui esso non è degenere e poi nel caso degenere. Esplicitare questi calcoli per il caso $|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle$.

Sol: La condizione di normalizzazione è
$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = |N|^2\,25 \Rightarrow |N| = \frac{1}{5},$$
quindi $N = 5e^{i\phi}$ con ϕ arbitrario. La probabilità P_4 per a_4 non degenere è
$$P_4 = \frac{1}{25}\left|3\langle\phi_4|\psi_1\rangle - 4i\langle\phi_4|\psi_2\rangle\right|^2,$$
se $|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle$ allora $P_4 = 0$. Nel caso in cui a_4 sia degenere, siano $\{|\phi_l\rangle\}$ gli autostati ad esso corrispondenti, allora
$$P_4 = \frac{1}{25}\sum_l\left|3\langle\phi_l|\psi_1\rangle - 4i\langle\phi_l|\psi_2\rangle\right|^2,$$
se $|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle$ abbiamo quattro possibilità

1. Se $1, 2 \notin \{l\}$ abbiamo ancora $P_4 = 0$
2. Se solo $1 \in \{l\}$ allora $P_4 = \frac{9}{25}$
3. Se solo $2 \in \{l\}$ allora $P_4 = \frac{16}{25}$
4. Se $1, 2 \in \{l\}$ allora $P_4 = 1$

Compiti per casa

Esercizio 5. Sia dato un sistema a due livelli con Hamiltoniana

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar\omega}{2}\left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right),$$

avente autoket ortonormali $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Siano dati gli operatori

$$\mathbf{a} = |0\rangle\langle 1|\,,\ \mathbf{a}^\dagger = |1\rangle\langle 0|$$

1. Calcolare
$$\left[\mathbf{a},\mathbf{a}^\dagger\right],\left\{\mathbf{a},\mathbf{a}^\dagger\right\},\left[\mathbf{H},\mathbf{a}\right],\left[\mathbf{H},\mathbf{a}^\dagger\right],\mathbf{a}^2,\left(\mathbf{a}^\dagger\right)^2$$
2. Trovare autovalori e autovettori dell'operatore
$$\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}.$$
3. Esprimere $\mathbf{H}$ in termini di $\mathbf{n}$ e $\mathbf{I}$.
4. Il sistema si trova, al tempo $t = 0$ nell'autostato di
$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger$$
corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$. Determinare
$$\langle\mathbf{A}\rangle,\left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle,\left\langle\Delta\mathbf{A}^2\right\rangle,$$
in funzione del tempo.
5. Sia dato l'operatore
$$\mathbf{B} = -i\left(\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger\right),$$
a partire dallo stesso stato iniziale calcolare
$$\langle\mathbf{B}\rangle,\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle,\left\langle\Delta\mathbf{B}^2\right\rangle,$$
6. Verificare la relazione di indeterminazione fra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Sol:

1. Si ha:
$$\left[\mathbf{a},\mathbf{a}^\dagger\right] = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\,,$$
$$\left\{\mathbf{a},\mathbf{a}^\dagger\right\} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \mathbf{I},$$
$$\left[\mathbf{H},\mathbf{a}\right] = -\hbar\omega\,|0\rangle\langle 1| = -\hbar\omega\mathbf{a},$$
$$\left[\mathbf{H},\mathbf{a}^\dagger\right] = \left[\mathbf{a},\mathbf{H}\right]^\dagger = -\left(\left[\mathbf{H},\mathbf{a}\right]^\dagger\right) = \hbar\omega\mathbf{a}^\dagger,$$
$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^{\dagger 2} = 0.$$
Notiamo che da queste risulta
$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = \mathbf{I},$$
$$\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right] = 2i\left(\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\right) = 2i\left(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\right),$$
$$\left\{\mathbf{A},\mathbf{B}\right\} = 2i\left(\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\right) = 2i\left(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\right)$$
2. L'operatore $\mathbf{n}$
$$\mathbf{n} = |1\rangle\langle 1|\,,$$
ha autovalori $|0\rangle$ e $|1\rangle$ con autovalori corrispondenti $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 1$.
3. L'Hamiltoniana si può esprimere come
$$\mathbf{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(2\mathbf{n} - \mathbf{I}\right).$$

4. L'operatore
$$\mathbf{A}=\mathbf{a}+\mathbf{a}^{\dagger}=|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|,$$
ha autovalori
$$|\pm\rangle=\frac{|0\rangle\pm|1\rangle}{\sqrt{2}},$$
con autovalori $a_{\pm}=\pm 1$. L'evoluzione di $\mathbf{A}$ è
$$\dot{\mathbf{A}}(t)=\frac{i}{\hbar}[\mathbf{H},\mathbf{A}]_t=-i\omega\left(\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}^{\dagger}(t)\right)=\omega\mathbf{B}(t),$$
$$\dot{\mathbf{B}}(t)=\frac{i}{\hbar}[\mathbf{H},\mathbf{B}]_t=-\omega\left(\mathbf{a}(t)+\mathbf{a}^{\dagger}(t)\right)=-\omega\mathbf{A}(t),$$
$$\ddot{\mathbf{A}}(t)=-\omega^2\mathbf{A}(t),$$
la cui soluzione è
$$\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}\cos\omega t+\mathbf{B}\sin\omega t.$$
Segue che
$$\langle\mathbf{A}(t)\rangle=\langle +|\mathbf{A}|+\rangle\cos\omega t+\langle +|\mathbf{B}|+\rangle\sin\omega t=\cos\omega t,$$
$$\begin{aligned}\left\langle\mathbf{A}^2(t)\right\rangle &= \langle +|\mathbf{A}^2|+\rangle\cos^2\omega t+\langle +|\mathbf{B}^2|+\rangle\sin^2\omega t+\langle +|\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}|+\rangle\cos\omega t\sin\omega t=\\ &= \cos^2\omega t+\sin^2\omega t-2i\cos\omega t\sin\omega t\end{aligned}$$

Esercizio 6. Data la base ortonormale completa $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$,$|\gamma\rangle$ e gli operatori
$$\mathbf{A}=|\alpha\rangle\langle\gamma|,\ \mathbf{B}=|\gamma\rangle\langle\beta|,$$

1. Calcolare $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$.
2. Calcolare $\langle\mathbf{A}\rangle$ e $\langle\mathbf{B}\rangle$ rispetto allo stato
$$|\psi\rangle=i|\alpha\rangle+3|\gamma\rangle.$$
3. $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono osservabili?

Sol:

1. Il commutatore è
$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=|\alpha\rangle\langle\beta|.$$
2. Valori medi
$$\langle\mathbf{A}\rangle=\frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}\left(-i\langle\alpha|+3\langle\gamma|\right)|\alpha\rangle\langle\gamma|\left(i|\alpha\rangle+3|\gamma\rangle\right)=-i\frac{3}{10},$$
$$\langle\mathbf{B}\rangle=\frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}\left(-i\langle\alpha|+3\langle\gamma|\right)|\gamma\rangle\langle\beta|\left(i|\alpha\rangle+3|\gamma\rangle\right)=0.$$
3. No perché non sono hermitiani.

Esercizio 7. L'operatore $\mathbf{U}=\mathbf{px}+\mathbf{xp}$ è Hermitiano? Fornire una stima per il valore minimo del prodotto
$$\sqrt{\langle\Delta\mathbf{U}^2\rangle\langle\Delta\mathbf{x}^2\rangle}$$

Sol: L'operatore è Hermitiano. Si ha
$$[\mathbf{U},\mathbf{x}]=[\mathbf{p},\mathbf{x}]\,\mathbf{x}+\mathbf{x}\,[\mathbf{p},\mathbf{x}]=-i\hbar\mathbf{x},$$
quindi
$$\sqrt{\langle\Delta\mathbf{U}^2\rangle\langle\Delta\mathbf{x}^2\rangle}\geq\frac{\hbar}{2}\left|\langle\mathbf{x}\rangle\right|.$$

Esercizio 8. Sia $|\psi\rangle$ uno stato di singola particella corrispondente alla funzione d'onda
$$\psi(x)=\langle x|\psi\rangle=\frac{N}{\sqrt{1+x^2}},$$

1. Calcolare la normalizzazione N
2. Calcolare il valor medio su questo stato di $\mathbf{x}$ e di $\mathbf{x}^2$

Sol:

1. Normalizzazione
$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{1+x^2} = |N|^2 \arctan x|_{-\infty}^{\infty} = |N|^2\,\pi,$$
quindi
$$N = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\phi}.$$

2. Valori medi
$$\langle \mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x}{1+x^2} = 0,$$
$$\left\langle \mathbf{x}^2\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x^2}{1+x^2} = \infty.$$

Esercizio 9. Scrivere la funzione d'onda più generale $\psi(x) = |\psi(x)|\, e^{i\theta(x)}$ tale che
$$|\psi(x)| = \begin{cases} \text{cost} & \text{per } -a < x < a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$
e per la quale valga $\langle \mathbf{p}\rangle = 0$, calcolare la varianza di $\mathbf{x}$. Scrivere la funzione d'onda nello spazio degli impulsi nel caso generale e nel caso in cui $\theta(x) = 0$ e calcolare la varianza di $\mathbf{p}$ in quest'ultimo caso.

Sol: Normalizzazione
$$\langle\psi|\psi\rangle = \int dx\, |\psi(x)|^2 = 2a\text{cost}^2 = 1 \Rightarrow \text{cost} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Si ha
$$\langle\psi|\mathbf{x}|\psi\rangle = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dx\, x = 0,$$
$$\langle\psi|\mathbf{x}^2|\psi\rangle = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dx\, x^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Valor medio dell'impulso
$$\begin{aligned}
\langle\psi|\mathbf{p}|\psi\rangle &= \int dx\, \langle\psi|x\rangle\langle x|\mathbf{p}|\psi\rangle = \\
&= -i\hbar\int dx\, |\psi(x)|\, e^{-i\theta(x)}\left(\delta(x+a) - \delta(x-a) + i\,|\psi(x)|\,\frac{d}{dx}\theta(x)\right)e^{i\theta(x)} = \\
&= -i\hbar\int dx\, |\psi(x)|\left(\delta(x+a) - \delta(x-a) + i\,|\psi(x)|\,\frac{d}{dx}\theta(x)\right) = \\
&= -i\hbar\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2a}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2a}} + \frac{i}{2a}\int_{-a}^{a} dx\,\frac{d}{dx}\theta(x)\right) = \\
&= \frac{\hbar}{2a}\left(\theta(a) - \theta(-a)\right) = 0
\end{aligned}$$

La condizione è quindi che $\theta(a) = \theta(-a)$. Nella rappresentazione degli autostati dell'impulso
$$\begin{aligned}
\langle p|\psi\rangle &= \int dx\, \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a\pi\hbar}}\int_{-a}^{a} dx\, e^{-i\frac{px}{\hbar}} e^{i\theta(x)}.
\end{aligned}$$

Se $\theta(x) = 0$
$$\begin{aligned}
\langle p|\psi\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{a\pi\hbar}}\int_{-a}^{a} dx\, e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \\
&= \frac{i\sqrt{\hbar}}{2p\sqrt{a\pi}}\left(e^{-i\frac{pa}{\hbar}} - e^{i\frac{pa}{\hbar}}\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{a\pi}}\frac{\sin\frac{pa}{\hbar}}{p}.
\end{aligned}$$

Varianza di $\mathbf{p}$
$$\langle\psi|\mathbf{p}^2|\psi\rangle = \frac{\hbar}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \sin^2\frac{pa}{\hbar} = \infty.$$

Esercizio 10. Su di uno stato la misura di una quantità $\mathbf{A}$ dà sempre lo stesso valore a. Sullo stesso stato invece la misura della quantità $\mathbf{B}$, che è compatibile con $\mathbf{A}$, dà il valore b_1 o b_2 in maniera equiprobabile.

1. Lo stato in esame è autostato di A?
2. Lo stato in esame è autostato di B?
3. Come si può esprimere tale stato?

Sol: Sia $|\psi\rangle$ lo stato in esame. Esso è sicuramente un autostato di $\mathbf{A}$ con autovalore a

$$\mathbf{A}\,|\psi\rangle = a\,|\psi\rangle\,,$$

mentre non è autostato di $\mathbf{B}$. Dal momento che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono compatibili, l'autovalore a deve essere necessariamente degenere, ossia deve esisere uno spazio Ω_a generato da una base ortonormale $\{|a_n\rangle\}$ tale che ogni suo elemento è autostato di $\mathbf{A}$ con autovalore a. Quindi

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n_a} c_k\,|a_k\rangle\,,$$

dove n_a è la molteplicità di a. Non abbiamo invece elementi per dire se gli autovalori b_1 e b_2 sono degeneri. Chiamiamo Ω_{b_1} e Ω_{b_2} i due autospazi, di dimensioni n_{b_1} e n_{b_2}, corrispondenti agli autovalori b_1 e b_2

$$\mathbf{B}\,|\nu\rangle = b_1\,|\nu\rangle\,,\ \forall\,|\nu\rangle \in \Omega_{b_1}\,,$$

$$\mathbf{B}\,|\mu\rangle = b_2\,|\mu\rangle\,,\ \forall\,|\mu\rangle \in \Omega_{b_2}\,.$$

In ciascuna delle intersezioni $\Omega_a \cap \Omega_{b_1}$ e $\Omega_a \cap \Omega_{b_2}$è possibile trovare almeno un vettore che è autostato simultaneo di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ $|\bar{\nu}\rangle \in \Omega_a \cap \Omega_{b_1}$, $|c_{\bar{k}}\rangle$ e $|\bar{\mu}\rangle \in \Omega_a \cap \Omega_{b_2}$. Con questa scelta ovviamente si ha

$$\mathbf{A}\,|\bar{\nu}\rangle = a\,|\bar{\nu}\rangle\,,$$

$$\mathbf{A}\,|\bar{\mu}\rangle = a\,|\bar{\mu}\rangle\,.$$

Lo stato ha quindi la forma

$$|\psi\rangle = \frac{|\bar{\nu}\rangle + e^{i\phi}\,|\bar{\mu}\rangle}{\sqrt{2}}.$$