

Esercitazione 03

25 ottobre 2024

Dinamica

Evoluzione nella rappresentazione di Heisenberg

Nella rappresentazione di Heisenberg sono gli operatori e non gli stati ad evolvere. Applicando un operatore su uno stato che evolve si ottiene

$$\mathbf{A}_S |v(t)\rangle_S = \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) |v(0)\rangle_S = |u(t)\rangle_S = \mathbf{U}(t) |u(0)\rangle_S,$$

che, moltiplicando a sinistra per $\mathbf{U}^\dagger(t)$, diventa

$$\mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) |v(0)\rangle = |u(0)\rangle,$$

ossia l'azione dell'operatore in rappresentazione di Heisenberg è

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t),$$

avente come input e output i due stati iniziali indipendenti dal tempo (rappresentazione di Heisenberg degli stati)

$$\mathbf{A}_H(t) |v\rangle_H = |u\rangle_H.$$

L'equivalenza di queste due rappresentazioni è evidente anche nel calcolo dei valori medi

$$\langle \mathbf{A}_S \rangle = \langle \psi(t) | \mathbf{A}_S | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \mathbf{A}_H(t) | \psi(0) \rangle = \langle \mathbf{A}_H \rangle.$$

Più in generale, gli operatori potrebbero avere una dipendenza parametrica dal tempo anche in rappresentazione di Schroedinger, in questo caso

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \mathbf{U}(t).$$

- L'evoluzione degli operatori è data da

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \dot{\mathbf{U}}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \dot{\mathbf{A}}_S(t) \mathbf{U}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} \mathbf{U}^\dagger(t) [\mathbf{H}(t), \mathbf{A}_S(t)] \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \dot{\mathbf{A}}_S(t) \mathbf{U}(t)$$

- Nel caso in cui $\mathbf{A}_S$ e $\mathbf{H}$ sono indipendenti dal tempo si ottiene

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{A}_H(t)].$$

- Notare che se

$$[\mathbf{H}, \mathbf{A}_S] = 0,$$

allora

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{A}_S,$$

ossia $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_H$ è una quantità conservata.

- Data un'Hamiltoniana di singola particella in un potenziale si ha

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}(\mathbf{x}),$$

$$[\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}^2, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] = -i \frac{\hbar}{m} \mathbf{p},$$

per calcolare

$$[\mathbf{H}, \mathbf{p}] = [\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{p}],$$

possiamo sviluppare in serie di potenze il potenziale

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \sum_n v_n \mathbf{x}^n,$$

e notare che il commutatore fra l'impulso e una potenza intera della posizione è

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}^n, \mathbf{p}] &= \mathbf{x} [\mathbf{x}^{n-1}, \mathbf{p}] + [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-1} = \\ &= \mathbf{x}^2 [\mathbf{x}^{n-2}, \mathbf{p}] + \mathbf{x} [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-2} + [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-1} = \\ &= \dots = n \mathbf{x}^{n-1} i \hbar \end{aligned}$$

per cui

$$[\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{p}] = i\hbar \mathbf{V}'(\mathbf{x}).$$

Le equazioni del moto per gli operatori in rappresentazione di Heisenberg sono quindi equivalenti a quelle classiche

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -\mathbf{V}'(\mathbf{x}).$$

- Per i valori medi vale il **Teorema di Ehrenfest**

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = - \left\langle \frac{dV}{dx}(\mathbf{x}) \right\rangle$$

Operatore di parità

Si definisce a partire dall'azione sugli autostati della posizione

$$\begin{aligned} \Pi |x\rangle &= |-x\rangle, \\ \Pi |\psi\rangle &= \int dx \psi(x') \Pi |x'\rangle = \int dx' \psi(x') |-x'\rangle, \\ \langle x | \Pi | \psi \rangle &= \psi(-x). \end{aligned}$$

L'operatore di parità è hermitiano, infatti

$$\begin{aligned} \langle \phi | \Pi | \psi \rangle &= \int dx' \phi^*(x') \psi(-x'), \\ \langle \phi | \Pi | \psi \rangle^* &= \int dx' \phi(x') \psi^*(-x') = \int dx \phi(-x) \psi^*(x) = \langle \psi | \Pi | \phi \rangle. \end{aligned}$$

Inoltre, dalla proprietà

$$\Pi^2 = \mathbf{I},$$

segue che Π è unitario

$$\Pi^\dagger = \Pi^{-1} = \Pi,$$

e che ha autovalori

$$\lambda = \pm 1,$$

corrispondenti ad autofunzioni pari e dispari

$$\begin{aligned} \Pi |\psi_p\rangle &= |\psi_p\rangle, \\ \Pi |\psi_d\rangle &= -|\psi_d\rangle. \end{aligned}$$

Azione sugli operatori:

$$\mathbf{A}' = \Pi \mathbf{A} \Pi$$

$$\begin{aligned} \langle x | \Pi \mathbf{x} \Pi | \psi \rangle &= \langle -x | \mathbf{x} \Pi | \psi \rangle = \int dx' \langle -x | \mathbf{x} \Pi | x' \rangle \psi(x') = \\ &= - \int dx' x \langle -x | -x' \rangle \psi(x') = - \int dx' x \delta(x - x') \psi(x') = \\ &= -x \psi(x) = - \langle x | \mathbf{x} | \psi \rangle \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \Pi \mathbf{x} \Pi &= -\mathbf{x}. \\ \{\mathbf{x}, \Pi\} &= 0 \\ \Pi \mathbf{x}^2 \Pi &= \Pi \mathbf{x} \Pi \Pi \mathbf{x} \Pi = \mathbf{x}^2 \\ [\mathbf{x}^2, \Pi] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x | \Pi \mathbf{p} \Pi | \psi \rangle &= \langle -x | \mathbf{p} \Pi | \psi \rangle = \int ds \langle -x | \mathbf{p} | -s \rangle \psi(s) = \\
&= -i\hbar \int ds \delta'(-x+s) \psi(s) = i\hbar \psi'(x) = -\langle x | \mathbf{p} | \psi \rangle.
\end{aligned}$$

$$\Pi \mathbf{p} \Pi = -\mathbf{p}.$$

$$\{\mathbf{p}, \Pi\} = 0.$$

$$[\mathbf{p}^2, \Pi] = 0$$

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Studiare per una particella 1D sottoposta a una forza costante le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi.

Sol: Una forza costante F corrisponde a un'energia potenziale $V(\mathbf{x}) = -F\mathbf{x}$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - F\mathbf{x},$$

da cui si ricava

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = F\mathbf{I},$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{I}Ft,$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \frac{\mathbf{p}(0)}{m}t + \mathbf{I}\frac{F}{2m}t^2.$$

Valori medi:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m},$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = +F,$$

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(0) \rangle + Ft,$$

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) \rangle + \frac{\langle \mathbf{p}(0) \rangle}{m}t + \frac{F}{2m}t^2.$$

Esercizio 2. Studiare per una particella 1D con un'energia potenziale $V \propto \mathbf{x}^4$ le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi. Confrontare con l'analogo caso classico.

Sol:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \gamma \mathbf{x}^4,$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -3\gamma \mathbf{x}^3.$$

Valori medi:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m},$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = -3\gamma \langle \mathbf{x}^3 \rangle.$$

Notare che in questo caso, le equazioni per i valori medi differiscono dal caso classico perché $\langle \mathbf{x}^3 \rangle \neq \langle \mathbf{x} \rangle^3$.

Esercizio 3. Date le due osservabili

$$\mathbf{A} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se sono compatibili
2. Trovarne autovalori e autovettori

$$\mathbf{A} |A\pm\rangle = a_{\pm} |A\pm\rangle$$

$$\mathbf{B} |B\pm\rangle = b_{\pm} |B\pm\rangle$$

3. Partendo dallo stato iniziale

$$|\psi_1\rangle = |A+\rangle,$$

viene misurato $\mathbf{A}$, che risultato si ottiene? Qual è lo stato dopo la misura?

4. Successivamente viene misurato $\mathbf{B}$. Che risultati e con quale probabilità si possono ottenere? Supponendo di aver ottenuto il risultato b_+ , si misura nuovamente $\mathbf{A}$. Quali sono i possibili risultati e con quale probabilità si ottengono?

5. A partire dallo stato

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} |A+\rangle + |A-\rangle \right)$$

calcolare:

$$\langle \mathbf{A} \rangle, \langle \Delta \mathbf{A}^2 \rangle, \langle \mathbf{B} \rangle, \langle \Delta \mathbf{B}^2 \rangle.$$

6. Sempre a partire da $|\psi_2\rangle$, si effettuano, una di seguito all'altra, le misure di $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e di nuovo $\mathbf{A}$. Qual è la probabilità di ottenere come risultato finale a_+ ?

Sol: In termini di matrici di Pauli

$$\mathbf{A} = \hbar \sigma_z, \quad \mathbf{B} = \hbar \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}.$$

1. Le grandezze non sono compatibili infatti

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} [\sigma_z, \sigma_x] = i \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} \sigma_y \neq 0.$$

2. Entrambe le matrici hanno autovalori $a_{\pm} = b_{\pm} = \pm \hbar$. La matrice $\mathbf{A}$ è già diagonale quindi utilizziamo $|A\pm\rangle$ come base canonica. Gli autostati di $\mathbf{B}$ sono

$$|B+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[(1+\sqrt{2}) |A+\rangle + |A-\rangle \right]$$

$$|B-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[|A+\rangle - (1+\sqrt{2}) |A-\rangle \right].$$

Invertendo

$$|A+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[(1+\sqrt{2}) |B+\rangle + |B-\rangle \right]$$

$$|A-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[|B+\rangle - (1+\sqrt{2}) |B-\rangle \right].$$

3. Una misura di $\mathbf{A}$ sullo stato $|\psi_1\rangle$ dà come risultato a_+ con probabilità 1. La misura non cambia lo stato.
4. La misura successiva di $\mathbf{B}$ dà $b_{\pm}$ con probabilità

$$P(b_+) = p = \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}, \quad P(b_-) = q = 1 - p = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}.$$

Supponendo che il risultato della misura sia b_+ il sistema si proietta nello stato

$$|B+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[(1+\sqrt{2}) |A+\rangle + |A-\rangle \right],$$

quindi una misura di $\mathbf{A}$ dà come risultato a_+ con probabilità $p_+ = p$ e a_- con probabilità $p_- = q$.

5. Medie

$$\langle \psi_2 | \mathbf{A} | \psi_2 \rangle = \frac{\hbar}{3},$$

$$\langle \psi_2 | \mathbf{A}^2 | \psi_2 \rangle = \hbar^2,$$

$$\langle \psi_2 | \Delta \mathbf{A}^2 | \psi_2 \rangle = \frac{8\hbar^2}{9}.$$

$$\langle \psi_2 | \mathbf{B} | \psi_2 \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{6}} \langle \psi_2 | \left((1 + \sqrt{2}) |A+\rangle - (1 - \sqrt{2}) |A-\rangle \right) \rangle = \hbar \frac{1 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \hbar \frac{\sqrt{2} + 4}{6},$$

$$\langle \psi_2 | \mathbf{B}^2 | \psi_2 \rangle = \hbar^2,$$

$$\langle \psi_2 | \Delta \mathbf{B}^2 | \psi_2 \rangle = \frac{\hbar^2 (9 - 4\sqrt{2})}{18}.$$

6. A seguito della prima misura i possibili risultati hanno probabilità

$$P_1(a_+) = \frac{2}{3}, \quad P_1(a_-) = \frac{1}{3},$$

con possibili stati finali

$$|A+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \left[(1 + \sqrt{2}) |B+\rangle + |B-\rangle \right]$$

$$|A-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \left[|B+\rangle - (1 + \sqrt{2}) |B-\rangle \right].$$

Le probabilità dei possibili risultati della seconda misura sono

$$P(b_+ | A+) = p = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}, \quad P(b_+ | A-) = q = \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}},$$

$$P(b_- | A+) = q, \quad P(b_- | A-) = p,$$

$$P_2(b_+) = P(b_+ | A+) P_1(a_+) + P(b_+ | A-) P_1(a_-) = \frac{2p + q}{3},$$

$$P_2(b_-) = P(b_- | A+) P_1(a_+) + P(b_- | A-) P_1(a_-) = \frac{2q + p}{3},$$

Dopo la terza misura si ottiene a_+ o a_- con probabilità totale

$$P(a_+ | B+) = p, \quad P(a_+ | B-) = q, \quad P(a_- | B+) = q, \quad P(a_- | B-) = p,$$

$$\begin{aligned} P_3(a_+) &= P(a_+ | B+) P_2(b_+) + P(a_+ | B-) P_2(b_-) = \\ &= p \frac{2p + q}{3} + q \frac{2q + p}{3} = \frac{2(p^2 + pq + q^2)}{3} = \frac{p^2 + q^2 + 1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(a_-) &= P(a_- | B+) P_2(b_+) + P(a_- | B-) P_2(b_-) = \\ &= q \frac{2p + q}{3} + p \frac{2q + p}{3} = \frac{4pq + q^2 + p^2}{3} = \frac{2pq + 1}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Buca infinita (solo iniziato). Data una particella di massa m in una dimensione sottoposta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \infty & \text{altrove} \end{cases},$$

calcolare spettro e autostati dell'Hamiltoniana.

Sol: Per studiare l'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right) \psi(x) = E \psi(x),$$

Notiamo che la funzione d'onda deve essere diversa da zero soltanto per $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$. In tale regione

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

con $k = \frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}$. Inoltre, per simmetria, deve essere $A = \pm B$ ossia le soluzioni sono di due tipi

$$\psi_c(x) = A \cos kx,$$

$$\psi_s(x) = A \sin kx.$$

Per trovare gli stati legati, impongano che

$$\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = \psi\left(\frac{L}{2}\right) = 0,$$

ossia

$$\cos k \frac{L}{2} = 0,$$

$$\sin k \frac{L}{2} = 0.$$

La prima è soddisfatta per

$$k = \frac{\pi(2j-1)}{L}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

la seconda per

$$k = \frac{2j\pi}{L} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Le energie sono quindi

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2} \frac{n^2}{L^2 m}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_{2j-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi(2j-1)}{L} x,$$

$$\psi_{2j}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi j}{L} x.$$

Lo stesso problema si poteva studiare nel caso di buca non simmetrica

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{altrove} \end{cases}.$$

Ovviamente si tratta soltanto di una traslazione di coordinate

$$\phi_{2j}(x) = \psi_{2j}\left(x - \frac{L}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{L}x - \frac{\pi}{2}(2j-1)\right) = (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi(2j-1)}{L} x$$

$$\phi_{2j+1}(x) = \psi_{2j+1}\left(x - \frac{L}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi j}{L}x - \pi j\right) = (-1)^j \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi j}{L} x,$$

data l'arbitrarietà della fase possiamo riassumere il tutto in

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Compiti per casa

Esercizio 5. Studiare per una particella 1D sottoposta a una forza elastica le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi.

Sol: Energia potenziale elastica: $V(\mathbf{x}) = \frac{k}{2} \mathbf{x}^2$.

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2} \mathbf{x}^2,$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -k\mathbf{x}.$$

La soluzione dell'equazione del moto è il moto armonico con frequenza $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \mathbf{p}(0) \sin \omega t,$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) \cos \omega t - \omega m \mathbf{x}(0) \sin \omega t,$$

Valori medi:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m},$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = -k \langle \mathbf{x} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) \rangle \cos \omega t + \frac{\langle \mathbf{p}(0) \rangle}{m\omega} \sin \omega t,$$

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(0) \rangle \cos \omega t - m\omega \langle \mathbf{x}(0) \rangle \sin \omega t.$$

Esercizio 6. Studiare l'evoluzione del pacchetto gaussiano per una particella libera in rappresentazione di Heisenberg. In particolare calcolare, $\langle \mathbf{x}_H(t) \rangle$, $\langle \mathbf{p}_H(t) \rangle$, $\langle \Delta^2 \mathbf{x}_H(t) \rangle$, $\langle \Delta^2 \mathbf{p}_H(t) \rangle$ e $\langle \mathbf{T}_H(t) \rangle$. Considerare il caso in cui la fase del pacchetto è $\varphi(x) = kx$ (caso balistico).

Sol: Per una particella libera

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

e l'evoluzione degli operatori posizione e quantità di moto è

$$\dot{\mathbf{p}}_H = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}_H] = 0,$$

$$\dot{\mathbf{x}}_H = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}_H] = \frac{i}{\hbar 2m} [\mathbf{p}_H^2, \mathbf{x}_H] = \frac{\mathbf{p}_H}{m},$$

con condizioni iniziali

$$\mathbf{p}_H(0) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x}_H(0) = \mathbf{x}.$$

La soluzione è quindi

$$\mathbf{p}_H(t) = \mathbf{p},$$

$$\mathbf{x}_H(t) = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{m} t.$$

Se inizialmente la funzione d'onda è un pacchetto gaussiano

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = e^{i\varphi(x)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = e^{i\varphi(x)} \sqrt{g(x)},$$

la quantità di moto media è

$$\langle \mathbf{p}_H \rangle = \langle \psi | \mathbf{p}_H(t) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x),$$

ossia rimane costante nel tempo, come ci si aspetta. Se $\varphi(x) = kx$ allora $\langle \mathbf{p}_H \rangle = \hbar k$. Il quadrato della quantità di moto è anch'esso una quantità conservata e (vedi esercizio sul pacchetto gaussiano)

$$\langle \mathbf{p}_H^2 \rangle = \langle \mathbf{p}^2 \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle^2 + \sigma_p^2 = \hbar^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2},$$

e la varianza non cambia nel tempo. Se $\varphi(x) = kx$ allora $\langle \mathbf{p}_H^2 \rangle = \hbar^2 k^2 + \sigma_p^2$. La posizione media è

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_H \rangle &= \langle \psi | \mathbf{x}_H(t) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{x} | \psi \rangle + \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle \frac{t}{m} = \\ &= x_0 + \frac{t}{m} \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x), \end{aligned}$$

se $\varphi(x) = kx$ si sposta linearmente nel tempo

$$\langle \mathbf{x}_H(t) \rangle = x_0 + \frac{\hbar k}{m} t.$$

Per studiare le fluttuazioni utilizziamo

$$\mathbf{x}_H^2(t) = \mathbf{x}^2 + \frac{\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{p}}{m}t + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}t^2 = \mathbf{x}^2 + \frac{2\mathbf{x}\mathbf{p} - i\hbar}{m}t + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}t^2.$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{x}\mathbf{p} | \psi \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \psi^*(x) \psi'(x) = \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) - i\frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x g'(x) = \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) - i\frac{\hbar}{2} [xg(x)]_{-\infty}^{\infty} + i\frac{\hbar}{2} = \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) + i\frac{\hbar}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_H^2(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}^2 \rangle + \frac{2\langle \mathbf{x}\mathbf{p} \rangle - i\hbar}{m}t + \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{m^2}t^2 = \\ &= \sigma^2 + x_0^2 + \frac{2\hbar t}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) + \frac{\hbar^2}{m}t^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2}t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}_H^2(t) \rangle - \langle \mathbf{x}_H(t) \rangle^2 = \\ &= \sigma^2 + \frac{2\hbar t}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - x_0) \varphi'(x) g(x) + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2}t^2. \end{aligned}$$

Se $\varphi(x) = kx$

$$\langle \Delta^2 \mathbf{x}(t) \rangle = \sigma^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2}t^2.$$

L'energia cinetica media è

$$\langle \mathbf{T}_H(t) \rangle = \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{8\sigma^2 m^2},$$

se $\varphi(x) = kx$

$$\langle \mathbf{T} \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{8\sigma^2 m^2},$$

notare che essa è diversa da zero anche se $k = 0$ (fluttuazioni quantistiche). La densità di probabilità della quantità di moto è (vedi esercizio sul pacchetto gaussiano) è

$$\rho(p) = |\phi(p)|^2 = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\hbar} e^{-\frac{2\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}},$$

gli autovalori dell'Hamiltoniana (le energie del sistema) sono

$$E(p) = \frac{p^2}{2m},$$

per cui la densità di probabilità dell'energia è

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \frac{\delta\left(p - \sqrt{2mE}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} + \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \frac{\delta\left(p + \sqrt{2mE}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{\pi}} \frac{\sigma}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} \left(e^{-\frac{2\sigma^2(\sqrt{2mE}-\hbar k)^2}{\hbar^2}} + e^{-\frac{2\sigma^2(\sqrt{2mE}+\hbar k)^2}{\hbar^2}} \right) = 2\sqrt{\frac{m}{\pi}} \frac{\sigma}{\hbar} e^{-2\sigma^2 k^2} e^{-\frac{4\sigma^2 m E}{\hbar^2}} \frac{\cosh \frac{4\sigma^2 k \sqrt{2mE}}{\hbar}}{\sqrt{E}} = \\ &= \frac{m}{\sigma_p^2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2\sigma_p^2}} e^{-\frac{mE}{\sigma_p^2}} \frac{\cosh \frac{\hbar k \sqrt{2mE}}{\sigma_p^2}}{\frac{\sqrt{mE}}{\sigma_p}} \end{aligned}$$

Esercizio 7. Data l'equazione di Schroedinger per una particella libera 1D

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t),$$

1. determinare le condizioni generali che devono soddisfare il modulo e la fase di $\psi = \rho(x, t) e^{i\theta(x, t)}$.
2. Prendendo il caso particolare dell'onda piana $\psi = \rho e^{i(kx - \omega t)}$, determinare la relazione di dispersione $\omega(k)$.

Sol: L'equazione di Schroedinger si può scrivere come

$$i \left(\dot{\rho} + i\dot{\theta}\rho \right) e^{i\theta} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d}{dx} (\rho' + i\theta'\rho) e^{i\theta} = -\frac{\hbar}{2m} (\rho'' + i\theta''\rho + 2i\theta'\rho' - \theta'^2\rho) e^{i\theta},$$

$$i\dot{\rho} - \dot{\theta}\rho = -\frac{\hbar}{2m} (\rho'' + i\theta''\rho + 2i\theta'\rho' - \theta'^2\rho),$$

separando parte reale e immaginaria

$$\dot{\theta}\rho = \frac{\hbar}{2m} (\rho'' - \theta'^2\rho),$$

$$\dot{\rho} = -\frac{\hbar}{2m} (\theta''\rho + 2\theta'\rho')'.$$

Per l'onda piana le equazioni danno luogo alla legge di dispersione

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2.$$

Esercizio 8. Lo stato $\psi(x)$ è pari al tempo $t = 0$. Lo sarà anche al tempo $t > 0$? Discutere in quali casi ciò accade.

Sol: In generale l'evoluzione non mantiene la parità della funzione d'onda tuttavia se l'Hamiltoniana commuta con l'operatore di parità le sue autofunzioni possono essere divise in funzioni pari e dispari

$$\mathbf{H} |\phi_n^p\rangle = E_n^p |\phi_n^p\rangle,$$

$$\mathbf{H} |\phi_n^d\rangle = E_n^d |\phi_n^d\rangle.$$

Lo stato iniziale può essere quindi espanso in una combinazione delle sole autofunzioni pari

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n^p\rangle,$$

e in questo caso esso evolve mantenendo la sua parità

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-i\frac{E_n^p}{\hbar}t} |\phi_n^p\rangle.$$