Esercitazione 04

08 novembre 2024

Densità di corrente 1D (flusso di probabilità)

La densità di probabilità della posizione di una particella è data da

$$\rho(x,t) = |\psi(x)|^2,$$

la densità di corrente, o flusso di probabilità è definita come

$$\boxed{J = \frac{\hbar}{i2m}\left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx}\right] = \frac{\hbar}{m}\Im\left[\psi^* \frac{d\psi}{dx}\right]}.$$

Dall'equazione di Schroedinger si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \psi^* \frac{d\psi}{dt} + \psi \frac{d\psi^*}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)|\psi(x)|^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\psi \frac{d^2\psi^*}{dx^2} - V(x)|\psi(x)|^2\right) = \\
&= i\frac{\hbar}{2m}\left(\psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi \frac{d^2\psi^*}{dx^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} J = \frac{\hbar}{i2m}\left(\psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi \frac{d^2\psi^*}{dx^2}\right),$$

per cui è soddisfatta l'equazione di continuità

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J = 0}.$$

In 3D la corrente è definita come

$$\boxed{\vec{J} = \frac{\hbar}{i2m}\left[\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*\right] = \frac{\hbar}{m}\Im\left[\psi^* \nabla\psi\right]},$$

e l'equazione di continuità è

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0}.$$

Particelle in 1D

- Il problema generale è

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right)\psi(x) = E\psi(x),$$

- Nel caso di stati non legati consideriamo un'onda incidente da sinistra e^{ikx} che viene parzialmente riflessa e trasmessa da un potenziale. Per cui a sinistra del potenziale si ha

$$\psi_L(x) = e^{ikx} + C_R e^{-ikx},$$

a destra del potenziale

$$\psi_R(x) = C_T e^{iqx}.$$

- In un punto di raccordo del potenziale la corrente, data da

$$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - c.c.\right) = \frac{\hbar}{m}\begin{cases} k\left(1 - |C_R|^2\right) & \text{Left} \\ q|C_T|^2 & \text{Right} \end{cases}$$

deve mantenersi costante, per cui

$$k\left(1 - |C_R|^2\right) = q|C_T|^2.$$

La corrente in entrata è

$$j_I = \frac{\hbar}{m}k,$$

quella riflessa

$$j_R = -\frac{\hbar}{m}k|C_R|^2,$$

e quella trasmessa

$$j_T = \frac{\hbar}{m} q \left| C_T \right|^2 ,$$

quindi il **coefficiente di riflessione** è

$$R \doteq \left| \frac{j_R}{j_I} \right| = \left| C_R \right|^2 ,$$

e il **coefficiente di trasmissione** è

$$T \doteq \left| \frac{j_T}{j_I} \right| = \frac{q}{k} \left| C_T \right|^2$$

e per la conservazione del flusso

$$T + R = 1.$$

Proprietà generali dei sistemi unidimensionali

Consideriamo il problema

$$\psi'' \left(x \right) + \left(\epsilon - U \left(x \right) \right) \psi \left(x \right) = 0, \tag{1}$$

con $U\left(x\right)$ funzione limitata inferiormente, continua o discontinua con discontinuità di prima specie e che all'infinito tende a infinito o a costante.

- Con queste assunzioni, la funzione d'onda e la sua derivata devono essere continue.
- Se il potenziale va a infinito per x finito, qui la derivata può essere discontinua.
- La funzione d'onda deve essere a un sol valore (si deve associare solo un valore di probabilità a ciascun intorno di x).
- *Le soluzioni di (1) possono essere scelte reali.* Supponiamo infatti che ψ_1 sia una funzione complessa che soddisfa (1). Il complesso coniugato dell'equazione (1) è

  $$\left(\psi^* \right)'' \left(x \right) + \left(\epsilon - U \left(x \right) \right) \psi^* \left(x \right) = 0,$$

  quindi anche ψ_1^* soddisfa la (1). Possiamo quindi scegliere la soluzione

  $$\psi_r = \psi_1 + \psi_1^*,$$

  che è reale.
- Possiamo dividere l'asse reale in due tipi di regione
  - **Tipo I**: in cui $\epsilon < U\left(x\right)$. Qui

    $$\frac{\psi''}{\psi} > 0,$$

    ossia la concavità della funzione d'onda è rivolta in direzione opposta all'asse x. Questo significa che nella regione I ci può essere al più uno zero (nodo) della funzione
  - **Tipo II**: in cui $\epsilon > U\left(x\right)$. Qui

    $$\frac{\psi''}{\psi} < 0,$$

    ossia la concavità della funzione d'onda è rivolta versol'asse x. In questa regione ci possono essere più nodi della funzione. Notare che un intervallo esterno di tipo II può dar luogo soltanto a un comportamento oscillante con infiniti zeri oppure ad un andamento asintotico costante diverso da zero.
- I flessi della funzione si incontrano soltanto nei nodi e nei punti di passaggio da una regione I a una regione II.
- *Non esistono soluzioni con energia $\epsilon < U_{min}$.* Se esistessero, non ci sarebbero mai regioni di tipo II per cui la funzione d'onda avrebbe una concavità tale per cui la funzione d'onda deve per forza divergere e quindi non sarebbe normalizzabile.
- Si possono avere stati legati solo se gli intervalli esterni sono di tipo I. Un intervallo esterno di tipo II si ha se $U \to U_\infty$ costante e $\epsilon > U_\infty$. In questo caso, asintoticamente si avrebbe

  $$\psi'' \left(x \right) + \left(\epsilon - U_\infty \right) \psi \left(x \right) = 0,$$

  che dà luogo a un andamento periodico.

- Aumentando la zona II aumenta $\left|\frac{\psi''}{\psi}\right|$, ossia il raggio di curvatura diminuisce e questo favorisce comportamenti oscillanti.
- La funzione d'onda dell'n-simo livello discreto di energia ha $n-1$ nodi (zeri). Infatti partendo da $\epsilon < U_{min}$ imponiamo che la soluzione vada a zero in $-\infty$ e che sia positiva. Da quanto detto essa sarà una funzione monotona crescente e quindi non normalizzabile. Aumentando ϵ la funzione inizierà ad divergere più lentamente fino a quando ϵ supererà U_{min}. Vi saranno quindi due punti di passaggio x_1 e x_2 nei quali la funzione svilupperà un flesso, questo diminuirà ancor ancor di più la pendenza della funzione che, per un certo ϵ_0 finirà per convergere anche a ∞: questo è il primo stato legato che, per come è stato costruito, non ha nodi. Continuando ad aumentare ϵ, si svilupperà un nodo nella regione I esterna che però darà luogo ancora una volta a un comportamento divergente. Proseguendo, il nodo si sposterà nella zona II e da questo momento in poi la coda destra della funzione comincerà nuovamente ad avvicinarsi ad x fino a convergere per un valore ϵ_1: il primo stato eccitato. Continuando così si vede che passando al successivo stato eccitato si genenera un nuovo nodo.
- Se L'Hamiltoniana commuta con l'operatore parità (ossia se $U(x) = U(-x)$)

$$[\mathbf{H}, \mathbf{\Pi}] = 0,$$

allora gli autostati sono funzioni pari o dispari. Nel caso di stati legati, essendo non degeneri, la parità è fissata. Lo stato fondamentale deve essere pari perché non ha nodi. il primo eccitato è dispari e così via alternandosi. Nel caso di stati di diffusione dello spettro continuo, essendo degeneri è possibile costruire autostati di parità non definita.

Oscillatore armonico 1D

L'Hamiltonia dell'oscillatore armonico è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{x}^2}{2}.$$

- Dai teoremi generali sulla particella in una dimensione, possiamo dire che
  1. Lo spettro è limitato inferiormente;
  2. Le energie sono positive;
  3. gli autostati delle enegie sono tutti legati;
  4. Lo spetto è non degenere;
  5. Poiché $[\mathbf{H}, \mathbf{\Pi}] = 0$ gli autostati sono pari o dispari con parità $(-1)^n$
- Si possono introdurre le variabili adimensionali

$$\hat{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\ell},\ \hat{\pi} = \frac{\mathbf{p}}{m\omega\ell},$$

e imponendo che

$$\left[\hat{\xi}, \hat{\pi}\right] = i\mathbf{I}$$

si ottiene la **lunghezza tipica** dell'oscillatore armonico

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

- Allo stesso modo si possono introdurre gli stati continui adimensionali $|\xi\rangle$

$$\langle\xi|\xi'\rangle = \delta(\xi - \xi') = \delta\left(\frac{1}{\ell}(x - x')\right) = \ell\delta(x - x') = \ell\langle x|x'\rangle,$$

per cui

$$|\xi\rangle = \sqrt{\ell}\,|x\rangle.$$

In questa base gli elementi di $\hat{\pi}$ sono

$$\begin{aligned} \langle \xi|\hat{\pi}|\xi'\rangle &= \frac{\ell^2}{\hbar}\langle x|\mathbf{p}|x'\rangle = -i\ell^2\frac{d}{dx}\delta(x-x') = \\ &= -i\ell^2\frac{d}{dx}\delta(\ell(\xi-\xi')) = -i\ell\frac{d}{dx}\delta(\xi-\xi') = \\ &= -i\frac{d}{d\xi}\delta(\xi-\xi'). \end{aligned}$$

Nel passare dalle variabili originali a quelle adimensionali

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\langle\xi|\psi\rangle.$$

- Introduciamo gli operatori di **creazione e distruzione** (adimensionali)

$$\mathbf{x} = \ell\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{\xi} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}^\dagger}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{p} = i\frac{\hbar}{\ell}\frac{\mathbf{a}^\dagger-\mathbf{a}}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{\pi} = i\frac{\mathbf{a}^\dagger-\mathbf{a}}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell} - i\frac{\ell}{\hbar}\mathbf{p}\right) = \frac{\hat{\xi}-i\hat{\pi}}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell} + i\frac{\ell}{\hbar}\mathbf{p}\right) = \frac{\hat{\xi}+i\hat{\pi}}{\sqrt{2}},$$

che soddisfano la regola di commutazione (operatori bosonici)

$$\left[\mathbf{a},\mathbf{a}^\dagger\right] = \mathbf{I}.$$

- Si definisce l'operatore hermitiano **"numero"**

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$$

che soddisfa le relazioni

$$[\mathbf{n},\mathbf{a}] = -\mathbf{a}, \quad \left[\mathbf{n},\mathbf{a}^\dagger\right] = \mathbf{a}^\dagger.$$

- Ricordiamo (vedere note di Metodi I) che gli autovalori di $\mathbf{n}$ sono i numeri interi

$$\mathbf{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

e che

$$\begin{aligned} \mathbf{a}|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \\ \mathbf{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle. \end{aligned}$$

- Nei nuovi operatori l'Hamiltoniana si scrive come

$$\mathbf{H} = \hbar\omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\right),$$

quindi $[\mathbf{H},\mathbf{n}] = 0$ ossia

$$\begin{aligned} \mathbf{H}|n\rangle &= E_n|n\rangle, \\ E_n &= \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

- Gli elementi di matrice degli operatori di creazione e distruzione sono, nella posizione

$$\langle x|\mathbf{a}^\dagger|x'\rangle = \delta(x-x')\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} - \ell\frac{\partial}{\partial x'}\right),$$

$$\langle x|\mathbf{a}|x'\rangle = \delta(x-x')\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} + \ell\frac{\partial}{\partial x'}\right),$$

nella posizione adimensionalizzata

$$\langle \xi | \mathbf{a}^\dagger | \xi' \rangle = \delta\left(\xi - \xi'\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi'} \right),$$

$$\langle \xi | \mathbf{a} | \xi' \rangle = \delta\left(\xi - \xi'\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right),$$

negli autostati di $\mathbf{n}$

$$\langle n | \mathbf{a}^\dagger | n' \rangle = \sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1},$$
$$\langle n | \mathbf{a} | n' \rangle = \sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}.$$

- Evoluzione temporale degli operatori

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}, \mathbf{a}\right] = -i\omega \mathbf{a} \Longrightarrow \mathbf{a}\left(t\right) = e^{-i\omega t}\mathbf{a},$$

$$\dot{\mathbf{a}}^\dagger = \frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}, \mathbf{a}^\dagger\right] = i\omega \mathbf{a}^\dagger \Longrightarrow \mathbf{a}^\dagger\left(t\right) = e^{-i\omega t}\mathbf{a}^\dagger.$$

- Funzione d'onda dello stato fondamentale

$$\begin{aligned} \langle \xi | \mathbf{a} | 0 \rangle &= \int d\xi' \ \langle \xi | \mathbf{a} | \xi' \rangle \langle \xi' | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi' \, \delta\left(\xi - \xi'\right) \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \psi_0\left(\xi'\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi \psi_0\left(\xi\right) + \psi_0'\left(\xi\right) \right) = 0, \end{aligned}$$

ossia

$$\xi \psi_0\left(\xi\right) + \psi_0'\left(\xi\right) = 0,$$

la cui soluzione normalizzata è una funzione gaussiana

$$\psi_0\left(\xi\right) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

- Costruzione ricorsiva degli stati eccitati:

$$\begin{aligned} \langle \xi | \mathbf{a}^\dagger | n \rangle &= \int d\xi' \ \langle \xi | \mathbf{a}^\dagger | \xi' \rangle \langle \xi' | n \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi' \, \delta\left(\xi - \xi'\right) \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \psi_n\left(\xi'\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi \psi_n\left(\xi\right) - \psi_n'\left(\xi\right) \right). \end{aligned}$$

Ne deriva la legge di ricorrenza

$$\psi_{n+1}\left(\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\left(n+1\right)}} \left(\xi \psi_n\left(\xi\right) - \psi_n'\left(\xi\right) \right).$$

- Partendo dallo stato fondamentale, il primo stato eccitato è

$$\psi_1\left(\xi\right) \propto \xi \psi_0\left(\xi\right),$$

il secondo

$$\psi_2\left(\xi\right) \propto \left(a_2 \xi^2 + b_2\right) \psi_0\left(\xi\right),$$

il terzo

$$\psi_2\left(\xi\right) \propto \left(a_3 \xi^3 + b_3 \xi\right) \psi_0\left(\xi\right),$$

e così via. Si vede quindi che la struttura delle funzioni d'onda è la seguente

$$\psi_n\left(\xi\right) = \alpha_n P_n\left(\xi\right) e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

dove P_n è un polinomio di grado n. Utilizzando la legge di ricorrenza si ottiene

$$\alpha_{n+1} P_{n+1}\left(\xi\right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\left(n+1\right)}} \left(2\xi P_n\left(\xi\right) - P_n'\left(\xi\right) \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

ossia

$$\alpha_{n+1}P_{n+1}(\xi) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2(n+1)}}\left(2\xi P_n(\xi) - P'_n(\xi)\right),$$

se impongo che

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2(n+1)}}$$

si ottiene

$$P_{n+1}(\xi) = 2\xi P_n(\xi) - P'_n(\xi),$$

che è soddisfatta dai polinomi di Hermite $H_n(\xi)$ con $\alpha_n = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2^n n!}}$. Per cui

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\psi_n(\xi) = \left(\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}\ell}\right)^{\frac{1}{2}} H_n\left(\frac{x}{\ell}\right) e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}$$

Polinomi di Hermite

- Intervallo: $[-\infty, \infty]$
- Funzione peso: $w = e^{-x^2}$
- Funzione generatrice: $g(t,x) = e^{-t^2+2xt}$
- Formula di Rodriguez: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$
- Ortogonalità: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}$
- Ricorrenza: $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$
- Valori espliciti dei primi polinomi:

$$\begin{aligned}
H_0 &= 1\\
H_1 &= 2x\\
H_2 &= 4x^2 - 2\\
H_3 &= 8x^3 - 12x\\
H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12
\end{aligned}$$

Valori medi su autostati dell'oscillatore armonico

$$\begin{aligned}
\langle n|\mathbf{x}^2|n\rangle &= \frac{\ell^2}{2}\langle n|\left(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\right)^2|n\rangle = \frac{\ell^2}{2}\langle n|\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\right)|n\rangle =\\
&= \frac{\ell^2}{2}\langle n|(2\mathbf{n}+1)|n\rangle = \frac{\ell^2}{2}(2n+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle n|\mathbf{x}^4|n\rangle &= \frac{\ell^4}{4}\langle n|\left(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\right)^4|n\rangle = \frac{\ell^4}{4}\langle n|\left(\mathbf{a}^{\dagger 2}\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}^2\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\mathbf{a}^{\dagger 2}\mathbf{a} + \mathbf{a}^2\mathbf{a}^{\dagger 2}\right)|n\rangle =\\
&= \frac{\ell^4}{4}\langle n|\Big(\mathbf{a}^\dagger\left(\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger - 1\right)\mathbf{a} + \mathbf{n}^2 + 2\mathbf{n}(1+\mathbf{n}) + (1+\mathbf{n})^2 + \mathbf{a}(1+\mathbf{n})\mathbf{a}^\dagger\Big)|n\rangle =\\
&= \frac{\ell^4}{4}\langle n|\Big(2\mathbf{n}^2 - \mathbf{n} + 2\mathbf{n}(1+\mathbf{n}) + 2(1+\mathbf{n})^2 + (1+\mathbf{n})\Big)|n\rangle =\\
&= \frac{3\ell^4}{4}\langle n|\left(2\mathbf{n}^2 + 2\mathbf{n} + 1\right)|n\rangle = \frac{3\ell^4}{4}\left(2n^2 + 2n + 1\right).
\end{aligned}$$

$$\Delta\left(\mathbf{x}^2\right)^2 = \langle n|\mathbf{x}^4|n\rangle - \langle n|\mathbf{x}^2|n\rangle^2 = \frac{\ell^4}{4}\left(6n^2 + 6n + 3 - 2n^2 - 1 - 4n\right) = \frac{\ell^4}{2}\left(2n^2 + n + 1\right)$$

$$\begin{aligned}
\langle n|\mathbf{p}^2|n\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2\ell^2}\langle n|\left(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}\right)^2|n\rangle = \frac{\hbar^2}{2\ell^2}\langle n|\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\right)|n\rangle =\\
&= \frac{\hbar^2}{2\ell^2}\langle n|(2\mathbf{n}+1)|n\rangle = \frac{\hbar^2}{2\ell^2}(2n+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left\langle \mathbf{x}^2 \right\rangle \left\langle \mathbf{p}^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \left(2n+1\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\langle n|\mathbf{p}^2|n\rangle &= \frac{\hbar^4}{4\ell^4} \langle n| \left(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}\right)^4 |n\rangle = \frac{\hbar^4}{4\ell^4} \langle n| \left(\mathbf{a}^{\dagger 2} + \mathbf{a}^2 - \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\right)^2 |n\rangle = \\
&= \frac{\hbar^4}{4\ell^4} \langle n| \left(\mathbf{a}^{\dagger 2}\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{a}^{\dagger 2} + \mathbf{I} + 4\mathbf{n} + 4\mathbf{n}^2\right) |n\rangle = \\
&= \frac{\hbar^4}{4\ell^4} \langle n| \left(\mathbf{a}^\dagger \left(\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger - 1\right)\mathbf{a} + \mathbf{a}\left(1+\mathbf{n}\right)\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{I} + 4\mathbf{n} + 4\mathbf{n}^2\right) |n\rangle = \\
&= \frac{\hbar^4}{4\ell^4} \langle n| \left(3\mathbf{I} + 6\mathbf{n} + 6\mathbf{n}^2\right) |n\rangle = \frac{3\hbar^4}{4\ell^4} \left(2n^2 + 2n + 1\right).
\end{aligned}$$

$$\Delta\left(\mathbf{p}^2\right)^2 = \langle n|\mathbf{p}^4|n\rangle - \langle n|\mathbf{p}^2|n\rangle^2 = \frac{\hbar^4}{2\ell^4}\left(2n^2 + n + 1\right)$$

$$\boxed{\Delta\left(\mathbf{x}^2\right)^2 \Delta\left(\mathbf{p}^2\right)^2 = \frac{\hbar^4}{4}\left(2n^2 + n + 1\right)^2}.$$

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Data la buca di potenziale infinita simmetrica di larghezza L e partendo dallo stato fondamentale, rimuovere il potenziale e studiare l'evoluzione della funzione d'onda.

Sol: La funzione d'onda iniziale è

$$\psi\left(x, t=0\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi}{L} x & |x| < \frac{L}{2} \\ 0 & |x| > \frac{L}{2}, \end{cases}$$

nello spazio dei momenti

$$\phi\left(k\right) = \frac{1}{\sqrt{L\pi}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, e^{-ikx} \cos \frac{\pi}{L} x = -4\sqrt{\pi L} \frac{\cos k\frac{L}{2}}{\left(k^2L^2 - \pi^2\right)}.$$

$$\psi\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx} \phi\left(k\right) e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}$$

$$\phi\left(k,t\right) = \phi\left(k\right) e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}.$$

L'impulso è una costante del moto, quindi nel tempo i suoi momenti non evolvono

$$\left\langle \mathbf{p}^2 \right\rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \left|\phi\left(k\right)\right|^2 k = 0,$$

$$\left\langle \mathbf{p}^2 \right\rangle = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \left|\phi\left(k\right)\right|^2 k^2 = 16\pi\hbar^2 L \int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^2 \frac{\cos^2 k\frac{L}{2}}{\left(k^2L^2 - \pi^2\right)^2} < \infty.$$

Del resto

$$\left\langle \mathbf{p}^2 \right\rangle = \left\langle \psi\left(x,t=0\right)|\mathbf{p}^2|\psi\left(x,t=0\right)\right\rangle = 2mE_1 = \frac{\hbar^2}{L^2}\pi^2$$

Esercizio 2. Potenziale a δ. Data una particella di massa m in una dimensione sottoposta al potenziale

$$U\left(x\right) = g\delta\left(x\right)$$

calcolare spettro e autostati dell'Hamiltoniana per valori di g negativi e positivi.

Sol: Assumendo la continuità della funzione d'onda, nel caso di potenziale a δ la derivata prima è in generale discontinua, infatti integrando in un intorno di $x = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, \psi''\left(x\right) = -g \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, \delta\left(x\right) \psi\left(x\right) + E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, \psi\left(x\right),$$

mandando ϵ a zero si ottiene

$$\psi'\left(0^+\right) - \psi'\left(0^-\right) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi\left(0\right).$$

Dividiamo lo spazio in due intervalli: I per $x < 0$ e II per $x > 0$

- **Caso** $g < 0$ **e** $E < 0$. Ci sono stati legati, indichiamo $k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$
$$\psi_I = Ae^{kx},$$
$$\psi_{II} = Be^{-kx}.$$
Per la continuità della ψ
$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A = B,$$
mentre la condizione sulla derivata prima dà
$$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) - \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(0) \Rightarrow kA = -\frac{mg}{\hbar^2}A$$
ossia esiste un solo stato legato con energia
$$E = -\frac{mg^2}{2\hbar^2},$$
e funzione d'onda
$$\psi(0) = \sqrt{\frac{mg}{\hbar^2}}\left(\theta(-x)e^{-\frac{mg}{\hbar^2}x} + \theta(x)e^{\frac{mg}{\hbar^2}x}\right).$$
- **Caso** $g < 0$ **e** $E > 0$. Stati di scattering $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
$$\psi_I = e^{ikx} + C_R e^{-ikx},$$
$$\psi_{II} = C_T e^{ikx}.$$
Le condizioni al raccordo sono
$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow 1 + C_R = C_T,$$
$$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) - \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(0) \Rightarrow ik(1 - C_R) = \left(ik - \frac{k^2 g}{E}\right)C_T,$$
$$1 = \left(1 + \frac{ikg}{2E}\right)C_T \Rightarrow C_T = \frac{2E}{2E - ikg}$$
$$C_R = C_T - 1 = \frac{ikg}{2E - ikg}$$
$$T = |C_T|^2 = \frac{4E^2}{4E^2 + k^2g^2} = \frac{1}{1 + \frac{mg^2}{2\hbar^2 E}},$$
$$R = |C_R|^2 = \frac{1}{\frac{2E\hbar^2}{mg^2} + 1}.$$
Notare che torna con il caso limite della buca di potenziale.
- **Caso** $g > 0$ **e** $E > 0$. Il problema è analogo a quello precedente ma con g positiva, i coefficienti di trasmissione e riflessione rimangono inalterati.

Esercizio 3. Un oscillatore armonico di frequenza ω si trova in uno stato in cui una misura di energia può fornire solo i valori E_0 (stato fondamentale) ed E_1 (primo stato eccitato) in maniera equiprobabile. Inoltre il valor medio dell'impulso al tempo $t = 0$ è
$$\langle \mathbf{p}(0) \rangle = \frac{\hbar}{\ell\sqrt{2}}$$
dove ℓ è la lunghezza fondamentale dell'oscillatore armonico.

1. Determinare l'insieme di stati che soddisfino tali condizioni.
2. Il sistema evolve fino al tempo t^* per cui $\langle \mathbf{x}(t^*) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) \rangle$. A questo tempo si esegue una misura di energia, determinare con che probabilità si ottiene il valore $\frac{3}{2}\hbar\omega$.
3. Determinare l'evoluzione temporale del sistema dopo la misura.

Sol: Lo stato ha la forma

$$|\psi(0)\rangle = e^{i\varphi}\left(\frac{|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right).$$

Sfruttiamo la condizione ulteriore data

$$\langle \mathbf{p}(0)\rangle = \langle\psi(0)|i\frac{\hbar}{\ell\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}\right)|\psi(0)\rangle = i\frac{\hbar}{\ell 2\sqrt{2}}\left(e^{-i\phi} - e^{i\phi}\right) = \frac{\hbar}{\ell\sqrt{2}},$$

quindi

$$\sin\phi = 1,$$

condizione che si verifica soltanto se $\phi = \frac{\pi}{2}$, ossia

$$|\psi(0)\rangle = e^{i\varphi}\frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Al tempo iniziale

$$\langle \mathbf{x}(0)\rangle = \langle\psi(0)|\frac{\ell}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\right)|\psi(0)\rangle = \frac{\ell}{2\sqrt{2}}(i - i) = 0.$$

L'evoluzione temporale dello stato è

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\varphi}\frac{e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}|0\rangle + ie^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}|1\rangle}{\sqrt{2}} = e^{i\left(\varphi + \frac{\omega}{2}t\right)}\frac{|0\rangle + ie^{-i\omega t}|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mathbf{x}(t)\rangle = \langle\psi(t)|\frac{\ell}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\right)|\psi(t)\rangle = \frac{\ell}{2\sqrt{2}}\left(ie^{-i\omega t} - ie^{i\omega t}\right) = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\sin\omega t.$$

Tale valor medio si annulla di nuovo per $t^* = \frac{\pi}{\omega}$ ed in questo istante lo stato è

$$|\psi(t^*)\rangle = e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}\frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

La probabilità di misurare l'energia E_1 è

$$p(E_1) = \frac{1}{2}.$$

Dopo la misura lo stato evolve soltanto per un fattore di fase globale

$$|\psi(t > t^*)\rangle \propto e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|1\rangle.$$

Compiti per casa

Esercizio 4. La probabilità di trovare una particella in una dimensione nell'intervallo $[-a/2, a/2]$ è costante, mentre la probabilità di trovare tale particella in qualsiasi punto all'esterno di tale intervallo è nulla. La corrente associata alla particella è nulla. Quale è la densità di probabilità di trovare la particella con impulso p?

Sol: La funzione d'onda ha la forma

$$\psi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)},$$

con

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} & |x| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

La corrente è

$$j(x) = \frac{\hbar}{m}\Im\left[\psi^*\frac{d\psi}{dx}\right] = \frac{\hbar}{m}\Im\left[\rho\left(\rho' + i\theta'\rho\right)\right] = \frac{\hbar}{m}\theta'\rho^2 = 0,$$

quindi

$$\theta(x) = \text{cost} = \alpha.$$

Nella rappresentazione della quantità di moto

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi(x)\,e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2\pi\hbar a}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\,e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \\
&= e^{i\alpha}\sqrt{\frac{2\hbar}{\pi a}}\frac{\sin\frac{ap}{2\hbar}}{p},
\end{aligned}$$

quindi

$$|\phi(p)|^2 = \frac{2\hbar}{\pi a}\frac{\sin^2\frac{ap}{2\hbar}}{p^2}.$$

Esercizio 5. Una particella di massa m è vincolata su di un segmento unidimensionale di lunghezza L. Al tempo $t = 0$ si trova in uno stato

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left(\sin\frac{\pi}{L}x + 2e^{i\theta}\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}x\right)$$

1. Determinare la corrente associata in funzione di θ.
2. Determinare la probabilità di ottenere in una misura l'energia dello stato fondamentale E_1.
3. Determinare l'evoluzione temporale dello stato.

Sol: La corrente è

$$\begin{aligned}
j(x) &= \frac{\hbar}{m}\Im\left[\psi^*\frac{d\psi}{dx}\right] = \\
& \frac{\hbar\pi}{L^2m}\Im\left[\left(\sin\frac{\pi}{L}x + e^{-i\theta}\sin 2\frac{\pi}{L}x\right)\left(\cos\frac{\pi}{L}x + 2e^{i\theta}\cos 2\frac{\pi}{L}x\right)\right] = \\
&= \frac{\hbar\pi}{L^2m}\Im\left[2e^{i\theta}\sin\frac{\pi}{L}x\cos 2\frac{\pi}{L}x + e^{-i\theta}\sin 2\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}x\right] = \\
&= \frac{\hbar\pi}{L^2m}\sin\theta\left(2\sin\frac{\pi}{L}x\cos 2\frac{\pi}{L}x - \sin 2\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}x\right) = \\
&= \frac{\hbar\pi}{L^2m}\sin\theta\left(2\sin\frac{\pi}{L}x\cos^2\frac{\pi}{L}x - 2\sin^3\frac{\pi}{L}x - 2\sin\frac{\pi}{L}x\cos^2\frac{\pi}{L}x\right) = \\
&= -\frac{2\hbar\pi}{L^2m}\sin\theta\sin^3\frac{\pi}{L}x.
\end{aligned}$$

Lo stato è una combinazione dei primi due autostati

$$|\psi\rangle = \frac{|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}},$$

quindi

$$P_1 = \frac{1}{2}.$$

Le energie del sistema sono

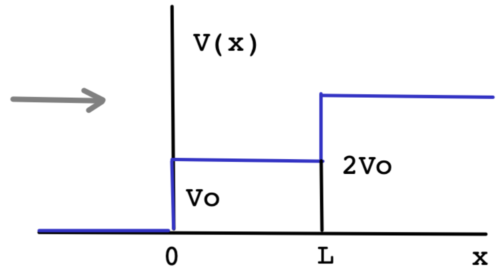
$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2}\frac{n^2}{L^2m},$$

qunidi l'evoluzione dello stato è

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\frac{\pi^2\hbar}{2L^2m}t}|1\rangle + e^{-i2\frac{\pi^2\hbar}{L^2m}t}e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}} \propto \frac{|1\rangle + e^{-i3\frac{\pi^2\hbar}{2L^2m}t}e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 6. Impostare il seguente problema. Un fascio di particelle incide sulla barriera mostrata in figura. Quando $E > 2V_0$:

1. Scrivere la forma generale delle funzioni d'onda nelle diverse regioni spaziali
2. Determinare le correnti incidenti, riflesse e trasmesse ed esprimere i coefficienti di riflessione e trasmissione



Sol: La soluzione di

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)\psi(x),$$

per $E > 2V_0$ non è normalizzabile e ha la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1x} + Ae^{-ik_1x} & x < 0 \\ Be^{ik_2x} + Ce^{-ik_2x} & 0 < x < L \\ De^{ik_3x} & x > L \end{cases}$$

con $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{2m(E-2V_0)}{\hbar^2}}$. Le condizioni di raccordo sono

$$\begin{aligned} 1 + A &= B + C \\ Be^{i(k_2-k_3)L} + Ce^{-i(k_2+k_3)L} &= D \\ 1 - A &= \frac{k_2}{k_1}(B - C) \\ Be^{i(k_2-k_3)L} - Ce^{-i(k_2+k_3)L} &= \frac{k_3}{k_2}D. \end{aligned}$$

La corrente è

$$j(x) = \frac{\hbar}{m}\begin{cases} k_1\left(1 - |A|^2\right) & x < 0 \\ k_2\left(|B|^2 - |C|^2\right) & 0 < x < L \\ k_3|D|^2 & x > L \end{cases}$$

dalla quale si ricavano le correnti incidente, riflessa e trasmessa

$$j_i = \frac{\hbar}{m}k_1,$$

$$j_r = -\frac{\hbar}{m}k_1|A|^2,$$

$$j_t = -\frac{\hbar}{m}k_3|D|^2,$$

corrispondenti ai coefficienti

$$R = \left|\frac{j_r}{j_i}\right| = |A|^2,$$

$$T = \left|\frac{j_t}{j_i}\right| = \frac{k_3}{k_1}|D|^2.$$

Determiniamo le costanti

$$B = \frac{1}{2k_2}(k_2 + k_3)e^{-i(k_2-k_3)L}D,$$

$$C = \frac{1}{2k_2}(k_2 - k_3)e^{i(k_2+k_3)L}D,$$

$$1 + A = \frac{D}{2k_2}\left[(k_2 + k_3)e^{-i(k_2-k_3)L} + (k_2 - k_3)e^{i(k_2+k_3)L}\right],$$

$$1 - A = \frac{D}{2k_1}\left[(k_2 + k_3)e^{-i(k_2-k_3)L} - (k_2 - k_3)e^{i(k_2+k_3)L}\right],$$

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{4k_1k_2}{\left(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2^2 + k_2k_3\right)e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(k_1k_2 - k_1k_3 - k_2^2 + k_2k_3\right)e^{i(k_2+k_3)L}} = \\
&= \frac{4}{\left(1+\sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}}+\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}+\sqrt{\frac{E-2V_0}{E}}\right)e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(1-\sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}}-\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}+\sqrt{\frac{E-2V_0}{E}}\right)e^{i(k_2+k_3)L}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{D}{4}\left[\left(1+\frac{k_3}{k_2}-\frac{k_2}{k_1}-\frac{k_3}{k_1}\right)e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(1-\frac{k_3}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}-\frac{k_3}{k_1}\right)e^{i(k_2+k_3)L}\right] = \\
&= \frac{D}{4}\left(1+\sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}}-\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}-\sqrt{\frac{E-2V_0}{E}}\right)e^{-i(k_2-k_3)L} + \\
&\quad +\frac{D}{4}\left(1-\sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}}+\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}-\sqrt{\frac{E-2V_0}{E}}\right)e^{i(k_2+k_3)L} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}}-\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}-\sqrt{\frac{E-2V_0}{E}}\right)e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(1-\sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}}+\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}-\sqrt{\frac{E-2V_0}{E}}\right)e^{i(k_2+k_3)L}}{\left(1+\sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}}+\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}+\sqrt{\frac{E-2V_0}{E}}\right)e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(1-\sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}}-\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}+\sqrt{\frac{E-2V_0}{E}}\right)e^{i(k_2+k_3)L}}
\end{aligned}
$$