

Esercitazioni 05-06

14 novembre 2024, 15 novembre 2024

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Una particella di massa m si muove in una dimensione. Essa è soggetta ad una forza costante diretta nel verso positivo dell'asse x . Usando il formalismo di Heisenberg determinare se l'impulso è una quantità conservata. Se al tempo $t = 0$ la funzione d'onda del sistema è $\psi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}}$ determinare $\langle \mathbf{p}^2(t) \rangle$.

Sol: L'Hamiltoniana del sistema è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - ax \quad a > 0.$$

Dal momento che

$$[\mathbf{H}, \mathbf{p}] = ia\hbar \neq 0,$$

la quantità di moto non è una quantità conservata. Evoluzione temporale:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}]_t = a\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + at\mathbf{I},$$

$$\langle \mathbf{p}(0) \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{p}^2(0) \rangle = \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2},$$

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(0) \rangle + at = at$$

$$\mathbf{p}^2(t) = \mathbf{p}^2(0) + a^2 t^2 \mathbf{I} + 2at\mathbf{p}(0),$$

$$\langle \mathbf{p}^2(t) \rangle = \langle \mathbf{p}^2(0) \rangle + a^2 t^2 + 2at \langle \mathbf{p}(0) \rangle = \langle \mathbf{p}^2(0) \rangle + a^2 t^2.$$

$$\sigma_p^2(t) = \langle \mathbf{p}^2(t) \rangle - \langle \mathbf{p}(t) \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}.$$

Esercizio 2. Una particella si muove liberamente in una dimensione. Una misura di energia dà con certezza il valore E . Possiamo dire che la corrente associata è diretta nel verso positivo dell'asse x ?

Sol: Fissata l'energia possiamo determinare solo il modulo della quantità di moto, per cui non si hanno informazioni sul verso della corrente.

Esercizio 3. Una particella si trova intrappolata in una buca di potenziale infinita con $\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$. Una misura di energia al tempo $t = 0$ fornisce con uguale probabilità i valori di energia relativa allo stato fondamentale e al primo stato eccitato.

1. Quali sono questi valori?
2. Qual è la forma più generale per lo stato in esame?
3. Se la probabilità di trovare la particella nella regione con $x > 0$ è $\frac{1}{2}$, essa rimane inalterata durante l'evoluzione temporale?

Sol:

$$1. \quad E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL}, \quad E_2 = 4E_1.$$

$$2. \quad |\psi\rangle = \frac{|\psi_1\rangle + e^{i\phi} |\psi_2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

3. Al tempo iniziale

$$\begin{aligned} p(x > 0; t = 0) &= \int_0^\infty dx |\psi(x)|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty dx |\psi_1(x)|^2 + \int_0^\infty dx |\psi_2(x)|^2 + 2 \cos \phi \int_0^\infty dx \psi_1(x) \psi_2(x) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2A \cos \phi) \end{aligned}$$

con $A = \int_0^\infty dx \psi_1(x) \psi_2(x)$. Al tempo generico

$$|\psi(t)\rangle = \frac{|\psi_1\rangle + e^{i(\phi + 3\frac{E_2 t}{\hbar})} |\psi_2\rangle}{\sqrt{2}},$$

quindi

$$p(x > 0; t) = \frac{1}{2} \left(1 + 2A \cos \left(\phi + 3\frac{E_2 t}{\hbar} \right) \right) \neq p(x > 0; t = 0).$$

Esercizio 4. Il valor medio di $\mathbf{a}$ in uno stato di un oscillatore armonico unidimensionale è

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{i}{2}.$$

1. Valutare sullo stesso stato i valori medi di $\mathbf{a}^\dagger$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$.
2. Valutare $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ e $\langle \mathbf{p}(t) \rangle$.

Sol:

1. $\langle \mathbf{a}^\dagger \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle^* = -\frac{i}{2}$, $\langle \mathbf{x} \rangle = \ell \frac{\langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle}{\sqrt{2}} = 0$, $\langle \mathbf{p} \rangle = i\hbar \ell \frac{\langle \mathbf{a}^\dagger \rangle - \langle \mathbf{a} \rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar}{\ell\sqrt{2}}$.
2. Nella rappresentazione di Heisenberg

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{a}] = -i\omega \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a}(t) = \mathbf{a} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{a}^\dagger(t) = \mathbf{a}^\dagger e^{i\omega t},$$

quindi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}(t) \rangle &= \langle \mathbf{a} \rangle e^{-i\omega t}, \quad \langle \mathbf{a}^\dagger(t) \rangle = \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle e^{i\omega t}, \\ \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \ell \frac{\langle \mathbf{a}(t) \rangle + \langle \mathbf{a}^\dagger(t) \rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \sin \omega t, \\ \langle \mathbf{p}(t) \rangle &= -i\hbar \frac{\langle \mathbf{a}^\dagger(t) \rangle - \langle \mathbf{a}(t) \rangle}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\hbar}{\ell\sqrt{2}} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Gli operatori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono definiti come

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{a}^{\dagger 2} + \mathbf{a}^2, \\ \mathbf{B} &= i(\mathbf{a}^{\dagger 2} - \mathbf{a}^2), \end{aligned}$$

con $\mathbf{a}^\dagger$ e $\mathbf{a}$ operatori di creazione e distruzione di un oscillatore armonico.

1. Mostrare che sono hermitiani
2. Stimare su di un generico autostato dell'oscillatore armonico $|n\rangle$ il minimo valore della quantità

$$\sqrt{\langle \Delta \mathbf{A}^2 \rangle \langle \Delta \mathbf{B}^2 \rangle}$$

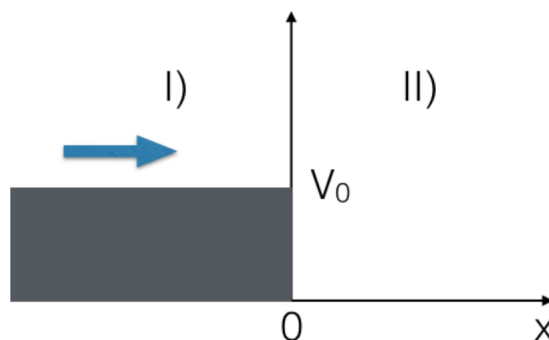
Sol: La dimostrazione dell'hermiticità è immediata. Per stimare il minimo del prodotto di indeterminazione possiamo calcolare

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= i(-[\mathbf{a}^{\dagger 2}, \mathbf{a}^2] + [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^{\dagger 2}]) = 2i[\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^{\dagger 2}] = \\ &= 2i(\mathbf{a}[\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger 2}] + [\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger 2}]\mathbf{a}) = \\ &= 2i(\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] + \mathbf{a}[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger]\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger]\mathbf{a} + [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger]\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) = \\ &= 4i(\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) = 4i(1 + 2\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) \end{aligned}$$

quindi per il principio di indeterminazione

$$\sqrt{\langle \Delta \mathbf{A}^2 \rangle \langle \Delta \mathbf{B}^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} |\langle n | [\mathbf{A}, \mathbf{B}] | n \rangle| = 2(1 + 2n).$$

Esercizio 6. Un fascio unidimensionale di particelle provenendo da sinistra si muove su di un potenziale a gradino come in figura.



1. Determinare la forma della funzione d'onda nelle regioni I) e II) in funzione della energia della particella.
2. Determinare il coefficiente di trasmissione e riflessione in funzione della energia della particella.

Sol: Per $E > V_0$ indicando $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ e $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, si ha

$$\psi_I(x) = e^{ik_1x} + C_R e^{-ik_1x},$$

$$\psi_{II}(x) = C_T e^{ik_2x}.$$

Le condizioni di raccordo sono

$$1 + C_R = C_T$$

$$k_1(1 - C_R) = k_2 C_T$$

quindi

$$C_T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2},$$

$$C_R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Corrente:

$$j_I = \frac{\hbar}{m} k_1,$$

$$j_R = -\frac{\hbar}{m} k_1 |C_R|^2,$$

$$j_T = \frac{\hbar}{m} k_2 |C_T|^2.$$

Coefficienti di riflessione e trasmissione

$$R = |C_R|^2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2},$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} |C_T|^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 1 - R.$$

Per $E < V_0$ $k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ e $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ non c'è soluzione con fascio proveniente da sinistra. Se provenisse da destra

$$\psi_I(x) = A e^{-k_1x},$$

$$\psi_{II}(x) = e^{-ik_2x} + C_R e^{-ik_2x}.$$

Raccordo:

$$A = 1 + C_R,$$

$$k_1 A = ik_2 (1 - C_R),$$

$$A = \frac{2ik_2}{k_1 + ik_2},$$

$$C_R = \frac{ik_2 - k_1}{k_1 + ik_2}.$$

Il coefficiente di riflessione è

$$R = |C_R|^2 = 1.$$

Esercizio 7. La misura di un operatore **A** può fornire solo i 3 valori a_1, a_2, a_3 (non degeneri). Si misura **A** selezionando soltanto i casi in cui si è ottenuto il valore a_1 della misura. Sugli stati così ottenuti si effettua una misura successiva di un altro operatore **B** che fornisce i valori b_1 con probabilità $\frac{1}{4}$, b_2 con probabilità $\frac{1}{2}$ e b_3 con probabilità $\frac{1}{4}$.

1. La grandezza **B** è compatibile con la grandezza **A**?
2. Come posso esprimere lo stato immediatamente prima della misura di **B** in termini di autostati di **B** stesso?
3. Come posso dare una rappresentazione possibile per **A** e in che base.
4. Nel caso in cui la misura di **B** abbia dato il valore b_1 , una misura immediatamente successiva di **A** con quale probabilità dà il valore a_1 ?

Sol:

1. No perché dalle ipotesi l'autostato corrispondente ad a_1 non è autostato di $\mathbf{B}$.
2. Prima della misura di $\mathbf{B}$ lo stato è una combinazione di autostati di $\mathbf{B}$

$$|a_1\rangle = \frac{|b_1\rangle + 2e^{i\phi_2}|b_2\rangle + e^{i\phi_3}|b_3\rangle}{\sqrt{4}}.$$

3. $\mathbf{A}$ è diagonale nella base dei suoi autovettori

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1,3} a_j |a_j\rangle \langle a_j|.$$

4. Dopo aver ottenuto b_1 da una misura di $\mathbf{B}$ il nuovo stato diventa $|b_1\rangle$. Misurando di nuovo $\mathbf{A}$ si ottiene a_1 con probabilità

$$p(a_1) = |\langle a_1 | b_1 \rangle|^2 = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 8. Una particella libera di massa m è descritta dalla funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi

$$\phi(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\sigma^2}},$$

con $p_0 > 0$.

1. La funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi è normalizzata?
2. Valutare la fluttuazione di $\mathbf{p}$ su tale stato.
3. Valutare il valor medio $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ nel tempo.
4. Valutare la corrente associata a tale stato.

Sol:

1. Sì
2. $\Delta^2 \mathbf{p} = \sigma^2$
3. Si vede immediatamente che $\langle \mathbf{p}(0) \rangle = p_0$ e dal momento che la quantità di moto è una quantità conservata, $\langle \mathbf{p}(t) \rangle = p_0$. Inoltre, la funzione d'onda al tempo iniziale, nella rappresentazione della posizione è una gaussiana centrata in zero, per cui $\langle \mathbf{x}(0) \rangle = 0$. Per il teorema di Ehrenfest, l'evoluzione del valor medio della posizione è quindi $\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) \rangle + \frac{p_0}{m}t = \frac{p_0}{m}t$.
4. La funzione d'onda è a sua volta un pacchetto gaussiano

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{i\frac{xp}{\hbar}} \phi(p) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} \end{aligned}$$

con $\sigma_x^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma}$. La corrente è quindi

$$j(x) = \frac{p_0}{2m\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Esercizio 9. Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + a|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|2\rangle,$$

Determinare a affinché lo stato sia normalizzato a 1. Se gli stati di base sono autostati di una grandezza fisica $\mathbf{A}$ con autovalori rispettivamente a_0 , $a_1 = a_2$ e con $a_0 \neq a_1$ determinare sullo stato $|\psi\rangle$ le probabilità di ottenere in una misura di $\mathbf{A}$ i valori a_0 oppure a_1 . Determinare gli stati assunti dal sistema immediatamente dopo la misura.

Sol: $a = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{3}}$, $p(a_0) = \frac{1}{3}$, $p(a_1) = \frac{2}{3}$. Nel primo caso $|\psi'\rangle = |0\rangle$ nel secondo $|\psi'\rangle = \frac{|1\rangle + ie^{-i\phi}|2\rangle}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 10. Una particella di massa m è vincolata in un segmento di lunghezza L e si trova nello stato la cui funzione d'onda espressa nel riferimento $[0, L]$ è

$$\psi(x, 0) = e^{ik_0 x} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad k_0 > 0.$$

1. Su questo stato una misura di energia può dare un risultato con certezza?
2. Valutare la corrente associata a questo stato.

Sol:

1. No perché $\psi(x, 0)$ non è un autostato di $\mathbf{H}$
2. La corrente associata allo stato è

$$j = \frac{2\hbar}{mL} k_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Compiti per casa

Esercizio 11. Una particella di massa m è confinata su di un segmento di lunghezza L . Una misura di energia può fornire i soli valori $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ o $E_3 = \frac{9\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$

1. Determinare tutti gli stati compatibili con le informazioni date.
 - (a) Determinare, su questi stati, il valor medio di $(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I})$ e discutere il risultato.
 - (b) Scrivere esplicitamente l'evoluzione temporale degli stati in esame e l'evoluzione la media di $(\mathbf{x}(t) - \frac{L}{2}\mathbf{I})$

Sol:

1. Lo stato è una combinazione dei due autostati corrispondenti alle due energie

$$|\psi\rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_3\rangle,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Entrambi gli autostati sono simmetrici rispetto a $x = \frac{L}{2}$ per cui

$$\langle \psi_{1,3} | \left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I} \right) | \psi_{1,3} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_{1,3}|^2 \left(x - \frac{L}{2} \right) = 0,$$

$$\langle \psi_3 | \left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I} \right) | \psi_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_3^* \psi_1 \left(x - \frac{L}{2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I} \right) | \psi \rangle &= |\alpha|^2 \langle \psi_1 | \left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I} \right) | \psi_1 \rangle + |\beta|^2 \langle \psi_3 | \left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I} \right) | \psi_3 \rangle + \\ &+ \alpha\beta^* \langle \psi_3 | \left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I} \right) | \psi_1 \rangle + \alpha^*\beta \langle \psi_1 | \left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I} \right) | \psi_3 \rangle = 0. \end{aligned}$$

3. Lo stato evoluto è

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} |\psi_1\rangle + \beta e^{-i\frac{E_3}{\hbar}t} |\psi_3\rangle,$$

che rimane simmetrico per cui si ha ancora $\langle \psi(t) | (\mathbf{x} - \frac{L}{2}\mathbf{I}) | \psi(t) \rangle = 0$.

Esercizio 12. Una particella si muove nel potenziale $V = \lambda(x^4 - x^2)$ con $\lambda > 0$.

1. Scrivere l'equazione di Schroedinger per il problema nella rappresentazione della coordinata.
2. Valutare un estremo inferiore E_m tale che $E_0 > E_m$ con E_0 energia dello stato fondamentale.
3. Valutare $\langle n | \mathbf{x} | n \rangle$ su un generico autostato dell'energia.

Sol:

1. Eq. di Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + \lambda(x^4 - x^2)\psi(x) = E\psi(x).$$

2. Un estremo inferiore può essere fissato nel minimo del potenziale corrispondente ai due punti

$$\pm x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$E_m = V(x_0) = -\frac{\lambda}{4}.$$

3. L'Hamiltoniana è pari

$$[\mathbf{H}, \mathbf{\Pi}] = 0,$$

per cui le autofunzioni sono funzioni pari o dispari. Il valor medio

$$\langle n|\mathbf{x}|n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \psi_n^2(x) = 0,$$

è nullo perchè l'integrando è dispari.

Esercizio 13. In una buca infinita di potenziale quadrata di ampiezza L una particella si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|1\rangle - i|2\rangle}{\sqrt{2}},$$

determinare l'evoluzione di $\langle \mathbf{p}(t) \rangle$ e confrontarla con l'analoga evoluzione classica avente lo stesso valore iniziale di $\langle \mathbf{x}(0) \rangle$ e $\langle \mathbf{p}(0) \rangle$.

Sol: Valori medi iniziali

$$\langle \mathbf{x}(0) \rangle = \frac{\langle 1|\mathbf{x}|1\rangle + \langle 2|\mathbf{x}|2\rangle - 2\Im \langle 2|\mathbf{x}|1\rangle}{2}$$

$$\begin{aligned} \langle 1|\mathbf{x}|1\rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin^2 \frac{\pi x}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L dx x \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right) = \\ &= \frac{L}{2} - \frac{1}{L} \int_0^L dx x \cos \frac{2\pi x}{L} = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 2|\mathbf{x}|2\rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin^2 \frac{2\pi x}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L dx x \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{L}\right) = \\ &= \frac{L}{2} - \frac{1}{L} \int_0^L dx x \cos \frac{4\pi x}{L} = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 2|\mathbf{x}|1\rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L dx x \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \cos \frac{3\pi x}{L}\right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^L dx \left(\sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L}\right) \right] = \\ &= -\frac{16L}{9\pi^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \Im \langle 2|\mathbf{x}|1\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{x}(0) \rangle = \frac{L}{2}.$$

$$\langle \mathbf{p}(0) \rangle = \frac{\langle 1|\mathbf{p}|1\rangle + \langle 2|\mathbf{p}|2\rangle - 2\Im \langle 2|\mathbf{p}|1\rangle}{2},$$

$$\begin{aligned} \langle 1|\mathbf{p}|1\rangle &= -i\hbar \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \frac{\pi x}{L} \frac{d}{dx} \sin \frac{\pi x}{L} = -i\hbar \frac{2\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} = \\ &= -i\hbar \frac{\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 2|\mathbf{p}|2\rangle &= -i\hbar \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} \frac{d}{dx} \sin \frac{2\pi x}{L} = -i\hbar \frac{4\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} = \\ &= -i\hbar \frac{2\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{4\pi x}{L} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 2|\mathbf{p}|1\rangle &= -i\hbar \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} \frac{d}{dx} \sin \frac{\pi x}{L} = -i\hbar \frac{2\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} = \\
&= -i\hbar \frac{\pi}{L^2} \int_0^L dx \left(\sin \frac{3\pi x}{L} + \sin \frac{\pi x}{L} \right) = -i\hbar \frac{8}{3L}, \\
\langle \mathbf{p}(0) \rangle &= \hbar \frac{8}{3L}.
\end{aligned}$$

Evoluzione dello stato

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1\rangle - ie^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|2\rangle}{\sqrt{2}},$$

con

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2} \frac{n^2}{L^2 m}.$$

Evoluzione dei valori medi

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}(t) \rangle &= -\Im \left(\langle 2|\mathbf{p}|1\rangle e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \right) = \hbar \frac{8}{3L} \cos \frac{E_2-E_1}{\hbar}t = \hbar \frac{8}{3L} \cos \frac{3\pi^2 \hbar}{2L^2 m}t, \\
\langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \frac{L}{2} - \langle 2|\mathbf{x}|1\rangle \Im \left(e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \right) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2} \sin \frac{3\pi^2 \hbar}{2L^2 m}t.
\end{aligned}$$

Periodo classico vs. periodo quantistico

$$\begin{aligned}
T_{cl} &= \frac{3L^2 m}{4\hbar}, \\
T_q &= \frac{4L^2 m}{3\pi \hbar}.
\end{aligned}$$

Esercizio 14. Al tempo $t = 0$ lo stato di un oscillatore armonico di massa m e pulsazione ω è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{4\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left[1 + \sqrt{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x e^{i\beta} \right] e^{-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}},$$

con $\beta \in [0, 2\pi)$ reale.

1. Determinare β in modo che il valore medio di $\mathbf{x}$ all'istante iniziale sia 0
2. Calcolare

$$\langle \psi(t) | \mathbf{p} | \psi(t) \rangle,$$

e

$$\langle \psi(t) | \mathbf{p}^2 | \psi(t) \rangle.$$

Sol: La fdo iniziale è combinazione delle prime due autofunzioni di $\mathbf{H}$

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_0(x) + \psi_1(x) e^{i\beta}].$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x} \rangle &= \langle \psi(0) | l \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger}{\sqrt{2}} | \psi(0) \rangle = \frac{l}{2\sqrt{2}} [e^{i\beta} \langle 0|\mathbf{a}|1\rangle + e^{-i\beta} \langle 1|\mathbf{a}^\dagger|0\rangle] = \\
&= \frac{l}{2\sqrt{2}} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) = 0
\end{aligned}$$

il valor medio di $\mathbf{x}$ è nullo per $\beta = \frac{\pi}{2}$. L'evoluzione dello stato è

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle + e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})} |1\rangle \right],$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t) | \mathbf{p} | \psi(t) \rangle &= i \frac{\hbar}{l} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \langle 1|\mathbf{a}^\dagger|0\rangle - e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \langle 0|\mathbf{a}|1\rangle \right] = \\
&= i \frac{\hbar}{l} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} - e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \right] = -\frac{\hbar}{l\sqrt{2}} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t) | \mathbf{p}^2 | \psi(t) \rangle &= \frac{\hbar^2}{l^2} \frac{1}{4} [\langle 0|(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger)|0\rangle + \langle 1|(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger)|1\rangle] = \\
&= \frac{\hbar^2}{l^2} \frac{1}{4} [\langle 0|(2\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + 1)|0\rangle + \langle 1|(2\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + 1)|1\rangle] = \\
&= \frac{\hbar^2}{l^2} \frac{1}{4} [1 + 3] = \frac{\hbar^2}{l^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 15. Un oscillatore armonico di pulsazione ω si trova, al tempo $t = 0$, in uno stato $|\psi(0)\rangle$ tale che:

1. Una misura di energia dà certamente un risultato minore di $2\hbar\omega$
2. Il valor medio di $\mathbf{p}$ è il massimo possibile

Determinare lo stato del sistema, il valor medio dell'energia e quello della posizione. Al tempo $t = \tau$ in cui per la prima volta il valor medio dell'impulso diventa nullo, la pulsazione diventa istantaneamente $\omega' = \frac{\omega}{2}$ e viene acceso un potenziale esterno costante $V = \hbar\frac{\omega}{4}$. Qual è il costo energetico di questa operazione? Quali sono i possibili risultati di una misura dell'energia per $t > \tau$? Calcolare la probabilità di ottenere $\hbar\omega$.

Sol: Lo stato iniziale è combinazione dei primi due autostati dell'energia

$$|\psi(0)\rangle = a_0|0\rangle + a_1e^{i\phi}|1\rangle,$$

dove si è posto $a_0, a_1 \in \mathbb{R}_+$ e $a_0^2 + a_1^2 = 1$. La media della quantità di moto è

$$\langle \mathbf{p} \rangle = i\frac{\hbar}{l}\frac{a_0a_1}{\sqrt{2}}[e^{-i\phi}\langle 1|\mathbf{a}^\dagger|0\rangle - e^{i\phi}\langle 0|\mathbf{a}|1\rangle] = \frac{\hbar}{l}\frac{a_0a_1}{\sqrt{2}}2\sin\phi,$$

e il suo valore massimo si ottiene per $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $a_0 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.¹ Quindi lo stato è

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

cui corrisponde un'energia media

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}(2\langle \psi(0)|\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}|\psi(0)\rangle + 1) = \frac{\hbar\omega}{2}(\langle 1|\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}|1\rangle + 1) = \hbar\omega.$$

Lo stato diventa al tempo τ

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{|0\rangle + ie^{-i\omega\tau}|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

In questo istante l'hamiltoniana diventa

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{x}^2}{8} + \hbar\frac{\omega}{4} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega'^2\mathbf{x}^2}{2} + \hbar\frac{\omega'}{2} = \hbar\omega'(\mathbf{b}^\dagger\mathbf{b} + 1).$$

L'energia media dello stato si calcola a partire da

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}^2 \rangle &= \langle \psi(\tau)|\mathbf{p}^2|\psi(\tau)\rangle = \frac{\hbar^2}{2\ell^2}\langle \psi(\tau)|(2\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + 1)|\psi(\tau)\rangle = \frac{\hbar^2}{\ell^2} \\ \langle \mathbf{x}^2 \rangle &= \langle \psi(\tau)|\mathbf{x}^2|\psi(\tau)\rangle = \frac{\ell^2}{2}\langle \psi(\tau)|(2\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + 1)|\psi(\tau)\rangle = \ell^2\end{aligned}$$

¹Il massimo può essere determinato anche in modo più rigoroso con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La funzione da minimizzare tiene conto del vincolo della normalizzazione

$$F(a_0, a_1, \phi, \lambda) = a_0a_1\sin\phi - \lambda(a_0^2 + a_1^2 - 1).$$

I valori estremali si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a_0} &= a_1\sin\phi - 2\lambda a_0 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_1} &= a_0\sin\phi - 2\lambda a_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} &= a_0a_1\cos\phi = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= (a_0^2 + a_1^2 - 1) = 0.\end{aligned}$$

Le soluzioni possibili sono

$$\begin{aligned}a_0 &= 0, a_1 = 1, \phi = \pm\pi, \lambda = 0 \\ a_0 &= 1, a_1 = 0, \phi = \pm\pi, \lambda = 0 \\ a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \phi = -\frac{\pi}{2}, \lambda = \pm\frac{1}{2} \\ a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \phi = \frac{\pi}{2}, \lambda = \pm\frac{1}{2}\end{aligned}$$

quest'ultima è proprio la condizione di massimo.

ottenendo

$$\langle E' \rangle = \langle \psi(\tau) | \mathbf{H}' | \psi(\tau) \rangle = \left[\frac{\hbar^2}{2m\ell^2} + \frac{m\omega^2\ell^2}{8} \right] + \hbar\frac{\omega}{4} = \frac{7}{8}\hbar\omega$$

ossia, nel cambiamento la variazione di energie è stata

$$\langle E' \rangle - \langle E \rangle = -\frac{1}{8}\hbar\omega,$$

ossia il sistema ha ceduto energia. I possibili valori dell'energia diventano

$$\epsilon_n = \frac{\hbar\omega(n+1)}{2}.$$

La probabilità di ottenere un valore di energia $\hbar\omega$ è

$$\begin{aligned} p &= |\langle \psi'_1 | \psi(\tau) \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle \psi'_1 | \psi_0 \rangle + ie^{-i\omega\tau} \langle \psi'_1 | \psi_1 \rangle|^2 = \\ &= \frac{|\langle \psi'_1 | \psi_0 \rangle|^2 + |\langle \psi'_1 | \psi_1 \rangle|^2 + 2\Re[ie^{-i\omega\tau} \langle \psi'_1 | \psi_0 \rangle^* \langle \psi'_1 | \psi_1 \rangle]}{2} \end{aligned}$$

$$\ell' = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} = \ell\sqrt{2}$$

$$\psi_n(x) = C_n(\ell) H_n\left(\frac{x}{\ell}\right) e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}$$

$$\psi'_n(x) = C_n(\ell\sqrt{2}) H_n\left(\frac{x}{\ell\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{x^2}{4\ell^2}}$$

$$C_0(\ell') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ell}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{C_0(\ell)}{2^{\frac{1}{4}}}$$

$$C_1(\ell') = \frac{C_1(\ell)}{2^{\frac{1}{4}}}$$

$$\langle \psi'_1 | \psi_0 \rangle \propto \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{3x^2}{4\ell^2}} x = 0$$

$$\langle \psi'_1 | \psi_1 \rangle = \frac{C_1^2(\ell) 4}{2^{\frac{3}{4}}\ell^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{3x^2}{4\ell^2}} x^2 = 2^{\frac{5}{4}} \frac{C_1^2(\ell)}{\ell^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{4\ell^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\ell} \frac{2^{\frac{5}{4}}}{\ell^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{4\ell^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2^{\frac{9}{4}}}{3\sqrt{3}}$$

$$p = \frac{|\langle \psi'_1 | \psi_1 \rangle|^2}{2} = \frac{2^{\frac{9}{2}}}{3\sqrt{3}} = 0.46$$

Esercizio 16. L'Hamiltoniana di un sistema si scrive in termini di operatori di creazione e distruzione come

$$\mathbf{H} = \hbar\omega\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}^\dagger,$$

con λ_1 e λ_2 complessi.

1. Determinare la condizione su λ_1 e λ_2 per avere $\mathbf{H}$ hermitiano.
2. Determinare lo stato fondamentale del sistema quando λ_1 e λ_2 sono reali.

Sol: Affinché $\mathbf{H}$ sia hermitano deve essere

$$\mathbf{H}^\dagger = \hbar\omega\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \lambda_1^*\mathbf{a}^\dagger + \lambda_2^*\mathbf{a} = \mathbf{H},$$

quindi $\lambda_1^* = \lambda_2$. Se i due coefficienti sono reali, essi devono essere uguali. In tale caso

$$\mathbf{H} = \hbar\omega\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{\sqrt{2}\lambda}{\ell}\mathbf{x} - \frac{\hbar\omega}{2}\mathbf{I},$$

l'hamiltoniana è quella di un oscillatore armonico il cui potenziale non è centrato nell'origine e con un termine costante in più. Possiamo completare il quadrato e riscrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{\sqrt{2}\lambda}{\ell}\mathbf{x} + \frac{\lambda^2}{\ell^2 m\omega^2}\mathbf{I} - \left(\frac{\lambda^2}{\ell^2 m\omega^2} + \frac{\hbar\omega}{2}\right)\mathbf{I} = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\mathbf{x} - x_0\mathbf{I})^2 - \left(\frac{\lambda^2}{\ell^2 m\omega^2} + \frac{\hbar\omega}{2}\right)\mathbf{I}, \end{aligned}$$

con

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}\lambda}{\ell m\omega^2}.$$

Definisco la nuova posizione tramite la traslazione

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} - x_0 \mathbf{I},$$

che è una trasformazione canonica

$$[\mathbf{s}, \mathbf{p}] = i\hbar.$$

Nelle nuove variabili

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{s}^2 + c\mathbf{I},$$

con

$$c = -\left(\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} + \frac{\hbar\omega}{2}\right).$$

Definisco i nuovi operatori di creazione e distruzione come

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mathbf{s}}{\ell} + i \frac{\ell}{\hbar} \mathbf{p} \right), \quad \mathbf{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mathbf{s}}{\ell} - i \frac{\ell}{\hbar} \mathbf{p} \right),$$

$$\mathbf{s} = \ell \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{p} = i\hbar \frac{\mathbf{b}^\dagger - \mathbf{b}}{\ell\sqrt{2}},$$

per cui

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \frac{1}{2} \right) + c\mathbf{I} = \hbar\omega \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + E_0 \mathbf{I},$$

dove

$$E_0 = -\frac{\lambda^2}{\hbar\omega},$$

è l'energia dello stato fondamentale. Quest'ultimo è lo stato fondamentale $|0\rangle_b$ di $\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}$ e la sua funzione d'onda è

$$\psi_0(s) = \langle s|0\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{\ell\pi^{\frac{1}{4}}}} e^{-\frac{s^2}{2\ell^2}},$$

ossia, nelle variabili originali

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell\pi^{\frac{1}{4}}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\ell^2}}.$$

Esercizio 17. Un oscillatore armonico di frequenza ω si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Valutare la fluttuazione quadratica media della posizione nel tempo.

Sol: In rappresentazione di Heisenberg gli operatori evolvono come

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{a}] = i\omega [\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \mathbf{a}] = -i\omega \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a}(t) = e^{-i\omega t} \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a}^\dagger(t) = e^{i\omega t} \mathbf{a}^\dagger.$$

La posizione media è

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \frac{\ell}{\sqrt{2}} \langle \psi | (\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}^\dagger(t)) | \psi \rangle = \\ &= \frac{i\ell}{2\sqrt{2}} (\langle 0|\mathbf{a}|1\rangle e^{-i\omega t} - \langle 1|\mathbf{a}^\dagger|0\rangle e^{i\omega t}) = \\ &= \frac{\ell}{\sqrt{2}} \sin \omega t, \end{aligned}$$

la media del quadrato della posizione

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}^2(t) \rangle &= \frac{\ell^2}{2} \langle \psi | (\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}^\dagger(t))^2 | \psi \rangle = \\ &= \frac{\ell^2}{2} \langle \psi | (\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) | \psi \rangle = \\ &= \frac{\ell^2}{2} \langle \psi | (\mathbf{I} + 2\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) | \psi \rangle = \ell^2,\end{aligned}$$

per cui

$$\sigma_x^2 = \langle \mathbf{x}^2(t) \rangle - \langle \mathbf{x}(t) \rangle^2 = \ell^2 \left(1 - \frac{\sin \omega t}{2} \right).$$

Esercizio 18. In un oscillatore armonico di massa m pulsazione ω siano $\mathbf{H}$ l'operatore che rappresenta l'energia totale del sistema $\mathbf{V}$ l'operatore che rappresenta l'energia potenziale del sistema $\mathbf{T}$ l'operatore che rappresenta l'energia cinetica del sistema

1. Le grandezze $\mathbf{V}$ e $\mathbf{T}$ sono costanti del moto?
2. Stimare il valore del prodotto $\sqrt{\langle \Delta \mathbf{V}^2 \rangle \langle \Delta \mathbf{T}^2 \rangle}$ sullo stato fondamentale.
3. Tale valore dipende dal tempo?

Sol: Non sono costanti del moto

$$\begin{aligned}[\mathbf{H}, \mathbf{V}] &= [\mathbf{T}, \mathbf{V}] = \frac{\omega^2}{2} [\mathbf{p}^2, \mathbf{x}^2] = \frac{\omega^2}{2} (\mathbf{p} [\mathbf{p}, \mathbf{x}^2] + [\mathbf{p}, \mathbf{x}^2] \mathbf{p}) = \\ &= \frac{\omega^2}{2} (\mathbf{p}\mathbf{x} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] + \mathbf{p} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] \mathbf{x} + \mathbf{x} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] \mathbf{p} + [\mathbf{p}, \mathbf{x}] \mathbf{x}\mathbf{p}) = \\ &= -i\hbar\omega^2 (\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{p}) \neq 0\end{aligned}$$

$$[\mathbf{H}, \mathbf{T}] = [\mathbf{V}, \mathbf{T}] = -[\mathbf{H}, \mathbf{V}] = i\hbar\omega^2 (\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{p}) \neq 0.$$

Per il principio di indeterminazione

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle \Delta \mathbf{V}^2 \rangle \langle \Delta \mathbf{T}^2 \rangle} &\geq \frac{1}{2} |\langle [\mathbf{V}, \mathbf{T}] \rangle| = \frac{\hbar\omega^2}{2} |\langle 0 | (i\hbar + 2\mathbf{p}\mathbf{x}) | 0 \rangle| = \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{2} |\langle 0 | (1 + (\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a})(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a})) | 0 \rangle| = \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{2} |1 + \langle 0 | (\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger) | 0 \rangle| = \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{2} |1 + \langle 0 | (2\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} - 1) | 0 \rangle| = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 19. Una particella libera è preparata al tempo $t = 0$ in un pacchetto gaussiano

$$\psi(x, 0) = e^{ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Con quale probabilità in una misura della posizione al tempo $t = 0$ ottengo un risultato maggiore di zero?
2. Ripetendo la misura al tempo $t = t^*$, con quale probabilità ottengo, in una misura di posizione, un valore $x > \hbar kt^*/m$?

Sol:

1. $p(x > 0, t = 0) = \int_0^\infty dx |\psi(x, 0)|^2 = \frac{1}{2}.$
2. La densità di probabilità rimane una gaussiana centrata in $x = \frac{\hbar k}{m}t$ per cui rimane

$$p\left(x > \frac{\hbar k}{m}t^*, t = t^*\right) = \int_0^\infty dx |\psi(x, t^*)|^2 = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 20. Una particella libera unidimensionale di massa m è descritta dalla funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi:

$$\phi(p) = \begin{cases} A\sqrt{p_0^2 - p^2} & |p| < p_0 \\ 0 & |p| \geq p_0 \end{cases},$$

1. Normalizzare la funzione d'onda.
2. Determinare $\langle \mathbf{p} \rangle$ su tale stato.
3. Determinare il valor medio $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ nel tempo.

Sol: Normalizzazione:

$$1 = |A|^2 \int_{-p_0}^{p_0} dp (p_0^2 - p^2) = |A|^2 \frac{4}{3} p_0^3 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2p_0^{\frac{3}{2}}}.$$

La funzione d'onda è pari quindi

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{3}{4p_0^3} \int_{-p_0}^{p_0} dp (p_0^2 - p^2) p = 0.$$

In rappresentazione di Heisenberg

$$\dot{\mathbf{x}} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{i}{2m\hbar} [\mathbf{p}^2, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{m}t,$$

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{x} \rangle + \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}t = \langle \mathbf{x} \rangle.$$

La posizione media rimane costante (anche se $\mathbf{x}$ non è una costante del moto) e, in questo caso, è pari a 0 in quanto la funzione d'onda nella base della posizione è pari a sua volta (la trasformata di Fourier di una funzione pari è pari). Si può anche vedere direttamente:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} \rangle &= \langle \phi | \mathbf{x} | \phi \rangle = \int dp dp' \langle \phi | p' \rangle \langle p' | \mathbf{x} | p \rangle \langle p | \phi \rangle = \\ &= i\hbar \int dp dp' \langle \phi | p' \rangle \delta'(p - p') \langle p | \phi \rangle = \\ &= -i\hbar \int dp' \phi(p) \phi'(p') = i\hbar \int_{-p_0}^{p_0} dp p = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 21. L'Hamiltoniana di un sistema unidimensionale è:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + a(\mathbf{x} - x_0 \mathbf{I})^4,$$

con a costante positiva. Discutere la simmetria delle sue autofunzioni.

Sol: L'Hamiltoniana è pari rispetto al punto x_0

$$[\mathbf{H}, \Pi_{x_0}] = 0,$$

dove l'operatore di parità agisce invertendo la coordinata rispetto a x_0

$$\Pi_{x_0} |x\rangle = \Pi_{x_0} |(x - x_0) + x_0\rangle = |-x + x_0 + x_0\rangle = |-x + 2x_0\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle x | \Pi_{x_0} | \psi \rangle &= \int dx' \langle x | \Pi_{x_0} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = \\ &= \int dx' \langle x | -x' + 2x_0 \rangle \langle x' | \psi \rangle = \\ &= \int dx' \delta(x + x' - 2x_0) \langle x' | \psi \rangle = \\ &= \langle 2x_0 - x | \psi \rangle. \end{aligned}$$

Dal momento che

$$\begin{aligned}
 \langle 2x_0 - x | \Pi_{x_0} | \psi \rangle &= \int dx' \langle 2x_0 - x | \Pi_{x_0} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = \\
 &= \int dx' \langle 2x_0 - x | -x' + 2x_0 \rangle \langle x' | \psi \rangle = \\
 &= \int dx' \delta(-x + x') \langle x' | \psi \rangle = \\
 &= \langle x | \psi \rangle,
 \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$\Pi_{x_0}^2 = \mathbf{I},$$

quindi gli autovalori di Π_{x_0} sono $\lambda = \pm 1$ e corrispondono alle funzioni pari e dispari sotto inversione della coordinata rispetto a x_0 .