Esercitazione 07

22 novembre 2024

Momento angolare

In meccanica quantistica, le componenti del momento angolare ($\mathbf{J}_x$, $\mathbf{J}_y$, $\mathbf{J}_z$) sono degli operatori hermitiani

$$\mathbf{J}_j^\dagger = \mathbf{J}_j,$$

definiti a partire dalle relazioni di commutazione fra di essi

$$[\mathbf{J}_k, \mathbf{J}_m] = i\epsilon_{kmn}\hbar\mathbf{J}_n.$$

Da essi si possono costruire gli operatori *a scala*

$$\mathbf{J}_\pm \quad = \quad \mathbf{J}_x \pm i\mathbf{J}_y,$$

che soddisfano le relazioni di commutazione

$$[\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] = 2\hbar\mathbf{J}_z,$$

$$[\mathbf{J}_\pm, \mathbf{J}_z] = \mp\hbar\mathbf{J}_\pm,$$

e l'operatore **momento angolare totale**

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_x^2 + \mathbf{J}_y^2 + \mathbf{J}_z^2 = \mathbf{J}_z^2 + \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_+\mathbf{J}_- + \mathbf{J}_-\mathbf{J}_+\right),$$

che soddisfa le relazioni di commutazione

$$\left[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_i\right] = \left[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_\pm\right] = 0.$$

È facile verificare che valgono le segueti relazioni

$$\mathbf{J}_+\mathbf{J}_- = \mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_z^2 + \mathbf{J}_z,$$

$$\mathbf{J}_-\mathbf{J}_+ = \mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_z^2 - \mathbf{J}_z,$$

$$[\mathbf{J}_+\mathbf{J}_-, \mathbf{J}_-\mathbf{J}_+] = 0.$$

Con queste informazioni vogliamo studiare lo spettro di questi opeatori. La prima osservazione è che, poiché $\mathbf{J}^2$ e $\mathbf{J}_z$ commutano, esistono degli autostati simultanei, che indicheremo con $|j, m\rangle$, ortonormali

$$\langle j, m | j', m'\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'},$$

e tali che

$$\mathbf{J}^2 |j, m\rangle = a_j |j, m\rangle,$$

$$\mathbf{J}_z |j, m\rangle = b_m |j, m\rangle.$$

Per calcolare gli autovalori a_j e b_m procediamo per passi:

1. a_j deve essere positivo poiché ogni $\mathbf{J}_k^2$ è un operatore hermitiano definito positivo, inoltre

   $$a_j = \langle j, m|\mathbf{J}^2|j, m\rangle = b_m^2 + \langle j, m|\mathbf{J}_x^2 + \mathbf{J}_y^2|j, m\rangle \geq b_m^2.$$

2. Segue che, per a_j fissato, b_m è limitato superiormente e inferiormente.

3. Applicando gli operatori a scala a un autostato simultaneo si ottiene un altro autostato

   $$\mathbf{J}^2\mathbf{J}_\pm |j, m\rangle = a_j\mathbf{J}_\pm |j, m\rangle,$$

   $$\mathbf{J}_z\mathbf{J}_\pm |j, m\rangle = \mathbf{J}_\pm (\mathbf{J}_z \pm \hbar) |j, m\rangle = (b_m \pm \hbar) |j, m\rangle,$$

   per cui

   $$\mathbf{J}_\pm |j, m\rangle = \gamma_{m,j}^\pm |j, m'\rangle,$$

   con $\gamma_{m,j}^\pm$ valori da determinare. Ossia gli operatori a scala permettono di passare da un autovettore con autovalore b_m ad un altro con $b_{m'} = b_m \pm \hbar$.

4. Poiché b_m è limitato, l'azione degli operatori a scala deve interrompersi, per cui deve esserci un valore $b_{\max} = b_\ell$ tale che $\mathbf{J}_+ |j, \ell\rangle = 0$ e un valore $b_{\min'} = b_{\ell'}$ tale che $\mathbf{J}_- |j, \ell'\rangle = 0$. Questi valori dipenderanno da j.

5. Applicando $\mathbf{J}^2$ ai vettori corrispondenti ai valori massimi e minimi di m si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2\left|j,\ell\right\rangle &= \left[\mathbf{J}_z^2+\hbar\mathbf{J}_z+\mathbf{J}_-\mathbf{J}_+\right]\left|j,\ell\right\rangle = \\ &= \left(b_\ell^2+\hbar b_\ell\right)\left|j,\ell\right\rangle = \\ &= a_j\left|j,\ell\right\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2\left|j,\ell'\right\rangle &= \left[\mathbf{J}_z^2-\mathbf{J}_z+\mathbf{J}_+\mathbf{J}_-\right]\left|j,\ell'\right\rangle = \\ &= \left({b_{\ell'}}^2-\hbar b_{\ell'}\right)\left|j,\ell'\right\rangle = \\ &= a_j\left|j,\ell'\right\rangle,\end{aligned}$$

quindi

$$a_j\left|j,\ell\right\rangle = \left(b_\ell^2+\hbar b_\ell\right)\left|j,\ell\right\rangle,$$

$$a_j\left|j,\ell'\right\rangle = \left({b_{\ell'}}^2-\hbar b_{\ell'}\right)\left|j,\ell'\right\rangle,$$

ossia

$$a_j = \left({b_\ell}^2+\hbar b_\ell\right) = \left({b_{\ell'}}^2-\hbar b_{\ell'}\right) \Rightarrow b_\ell = -b_{\ell'},$$

e

$$a_j = b_\ell\left(b_\ell+\hbar\right).$$

Vediamo che per ogni ℓ il parametro j è fissato, per cui possiamo identificare questi due valori $j=\ell$.

6. Dal momento che

$$-b_j \leq b_m \leq b_j,$$

e sapendo che si può passare da $|j,-j\rangle$ a $|j,j\rangle$ con un numero finito di salti di un'unità applicando $\mathbf{J}_+$, si ha che $2j$ deve essere intero, ossia j deve essere semintero o intero

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$$

7. Di conseguenza

$$m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j,$$

e

$$b_m = -\hbar j, \hbar\left(-j+1\right), \ldots, \hbar\left(j-1\right), \hbar j.$$

8. Da quanto detto prima, possiamo finalmente scrivere lo spettro di $\mathbf{J}_z$ e $\mathbf{J}^2$.

$$\mathbf{J}_z\left|j,m\right\rangle = \hbar m\left|j,m\right\rangle,$$

$$\mathbf{J}^2\left|j,m\right\rangle = \hbar^2 j\left(j+1\right)\left|j,m\right\rangle.$$

9. Si possono ora calcolare i coefficienti $\gamma_{m,j}^{\pm}$

$$\langle j,m|\mathbf{J}_-\mathbf{J}_+|j,m\rangle = \gamma_{m,j}^{+} = \langle j,m|\left(\mathbf{J}^2-\mathbf{J}_z^2-\hbar\mathbf{J}_z\right)|j,m\rangle = \hbar^2 j\left(j+1\right)-\hbar^2 m\left(m+1\right)$$

$$\langle j,m|\mathbf{J}_+\mathbf{J}_-|j,m\rangle = \gamma_{m,j}^{-} = \langle j,m|\left(\mathbf{J}^2-\mathbf{J}_z^2+\hbar\mathbf{J}_z\right)|j,m\rangle = \hbar^2 j\left(j+1\right)-\hbar^2 m\left(m-1\right)$$

ossia

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_+\left|j,m\right\rangle &= \hbar\sqrt{j\left(j+1\right)-m\left(m+1\right)}\left|j,m+1\right\rangle \\ \mathbf{J}_-\left|j,m\right\rangle &= \hbar\sqrt{j\left(j+1\right)-m\left(m-1\right)}\left|j,m-1\right\rangle.\end{aligned}$$

Rappresentazione nella base degli autostati

Settore $j=0$

$$\mathbf{J}^2\left|0,0\right\rangle = \mathbf{J}_j\left|0,0\right\rangle = 0.$$

Settore $j = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{J}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

$$\mathbf{J}_+ \,|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \hbar \,|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$\mathbf{J}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$$

$$\mathbf{J}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

Settore $j = 1$

$$\mathbf{J}^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_+ \,|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1, 0\rangle$$
$$\mathbf{J}_+ \,|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1, 1\rangle$$

$$\mathbf{J}_+ = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_- = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_x = \hbar\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_y = \hbar\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Fluttuazioni

$$\langle j, m|\mathbf{J}_x^2|jm\rangle = \langle j, m|\mathbf{J}_y^2|jm\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(j\left(j+1\right) - m^2\right),$$

$$\frac{1}{4}\left|\langle j, m|\left[\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y\right]|jm\rangle\right|^2 = \frac{\hbar^4}{4}m^2$$

il minimo di indeterminazione si ha per $m = \pm j$.

Coordinate sferiche

$$\psi(x,y,z) \to \psi(r,\theta,\phi),$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} dxdydz\ |\psi(x,y,z)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr\, r^2 \sin\theta\, |\psi(r,\theta,\phi)|^2 = 1$$
$$P(r,\theta,\phi) = r^2 \sin\theta\, |\psi(r,\theta,\phi)|^2 .$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\sin\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

consideriamo il vettore delle derivate in coordinate cartesiane

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

e quello delle derivate nelle coordinate sferiche

$$\vec{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\phi \end{pmatrix},$$
$$\vec{\partial} = \hat{M}\vec{\nabla}$$
$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\phi\cos\theta & r\sin\phi\cos\theta & -r\sin\theta \\ -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$
$$\vec{\nabla} = \hat{M}^{-1}\vec{\partial}$$
$$\hat{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & \frac{\cos\phi\cos\theta}{r} & -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \\ \sin\phi\sin\theta & \frac{\sin\phi\cos\theta}{r} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix},$$

Momento angolare orbitale

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{p}_x & \mathbf{p}_y & \mathbf{p}_z \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\mathbf{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$\mathbf{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right),$$
$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right] = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_x &= -i\hbar\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ \mathbf{L}_y &= -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ \mathbf{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_\pm &= -i\hbar\left((-\sin\phi \pm i\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm i\sin\phi)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) = \\
&= -i\hbar\left(\pm i(\cos\phi \pm i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm i\sin\phi)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) = \\
&= \hbar e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}$$

Le matrici del momento angolare non dipendono da r quindi gli autostati dipendono dalle sole variabili angolari

$$\langle\theta,\psi|l,m\rangle = Y_l^m(\theta,\phi),$$

queste funzioni vengono dette **armoniche sferiche**.

- Armoniche sferiche come autostati di $\mathbf{L}_z$:

  $$\langle\theta,\phi|\mathbf{L}_z|l,m\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar m Y_l^m(\theta,\phi),$$

  segue che

  $$Y_l^m(\theta,\phi) = e^{im\phi}f_{lm}(\theta).$$

- Da quanto detto sopra $Y_l^0(\theta) = f_{l0}(\theta)$ non dipende da ϕ quindi

  $$\langle\theta,\phi|\mathbf{L}^2|l,0\rangle = -\hbar^2\left(\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)Y_l^0(\theta) = \hbar^2 l(l+1),$$

  quindi queste funzioni sono soluzioni dell'equazione differenziale

  $$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + l(l+1)\right)Y_l^0(\theta) = 0,$$

  ossia sono proporzionali ai polinomi di Legendre

  $$Y_l^0(\theta) \propto P_l(\cos\theta).$$

- Dallo stato con $m = 0$ si possono ricavare gli altri applicando gli operatori a scala.

  $$Y_l^{\pm1}(\theta,\phi) = \frac{\langle\theta,\phi|\mathbf{L}_\pm|l,0\rangle}{\hbar\sqrt{l(l+1)}} = \pm\frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_l^0(\theta)$$

  eccetera.

- Si può vedere che le armoniche sferiche hanno la forma

  $$Y_l^m(\theta,\phi) = A_{m,l}e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta),$$

  $$A_{m,l} = \epsilon\sqrt{\frac{(2l+1)!\,(l-|m|)!}{4\pi\,(l+|m|)!}},$$

  $$\epsilon = \begin{cases}(-1)^m & \text{per } m \geq 0\\ 1 & \text{per } m < 0\end{cases}$$

  con $P_l^m(x)$ **funzioni associate di Legendre**

  $$P_l^m(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x),$$

  $$\int_{-1}^{1}dx\,P_l^m(x)\,P_{l'}^m(x) = \delta_{l.l'}\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

  $$P_l^m(\cos\theta) = (\sin\theta)^{|m|}\frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)^{|m|}}P_l(\cos\theta),$$

Parità:

$$\vec{r} \to -\vec{r} \Rightarrow \theta \to \pi+\theta, \quad \phi \to \pi+\phi$$

$$Y_l^m(\theta,\phi) \to (-1)^m A_{m,l} e^{im\phi} P_l^m(-\cos\theta) = (-1)^m A_{m,l} e^{im\phi} (-1)^m (-1)^l P_l^m(\cos\theta) = (-1)^l Y_l^m(\theta,\phi)$$

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr\ \sin\theta f^*(\theta,\phi)\, g(\theta,\phi)$$

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\
Y_1^{\pm1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi}\sin\theta \\
Y_2^0 &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(1-3\cos^2\theta\right) \\
Y_2^{\pm1} &= \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{\pm i\phi}\sin\theta\cos\theta \\
Y_2^{\pm2} &= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{\pm i2\phi}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Laplaciano in coordinate sferiche

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial^2\phi} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{r^2\hbar^2}\mathbf{L}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2\hbar^2}\mathbf{L}^2
\end{aligned}$$

Polinomi di Legendre

- Intervallo: $[-1,1]$
- Funzione peso: $w=1$
- $s(x) = 1-x^2$
- Funzione generatrice: $g(t,x) = \left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ (con $|t|<1$)
- Formula di Rodriguez: $P_n(x) = (2^n n!)^{-1} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$
- Ortogonalità: $\int_{-1}^{1} dx\, P_n(x)P_m(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$
- Ricorrenza: $P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}xP_n - \frac{n}{n+1}P_{n-1}$
- Derivata: $\left(1-x^2\right)P_n' = n\left[P_{n-1}-xP_n\right]$
- Eq. differenziale: $\left(1-x^2\right)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$
- Simmetrie: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$
- Valori espliciti dei primi polinomi:

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 \\
P_1 &= x \\
P_2 &= \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right) \\
P_3 &= \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right) \\
P_4 &= \frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)
\end{aligned}$$

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Calcolare i valori medi di $\mathbf{L}_x$ e $\mathbf{L}_y$ in un autostato generico di $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$.

Sol: Ricordando che

$$\mathbf{L}_\pm |l, m\rangle = f_\pm(l, m) |l, \pm 1\rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle l, m|\mathbf{L}_x|l, m\rangle &= \frac{1}{2} \langle l, m| (\mathbf{L}_+ + \mathbf{L}_-) |l, m\rangle = \\
&= \frac{1}{2} [f_- (l, m) \langle l, m|l, m-1\rangle + f_+ (l, m) \langle l, m|l, m+1\rangle] = 0.
\end{aligned}$$

Discorso analogo per $\mathbf{L}_y$.

Esercizio 2. Calcolare i valori medi di $\mathbf{L}_x^2$ e $\mathbf{L}_y^2$ in un autostato generico di $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$.

Sol: Ricordando che

$$[\mathbf{L}_+, \mathbf{L}_-] = 2\hbar\mathbf{L}_z,$$

possiamo esprimere i quadrati delle componenti x e y del momento angolare come

$$\mathbf{L}_x^2 = \frac{\mathbf{L}_+^2 + \mathbf{L}_-^2 + 2\mathbf{L}_-\mathbf{L}_+ + 2\hbar\mathbf{L}_z}{4},$$

$$\mathbf{L}_y^2 = \frac{-\mathbf{L}_+^2 - \mathbf{L}_-^2 + 2\mathbf{L}_-\mathbf{L}_+ + 2\hbar\mathbf{L}_z}{4},$$

quindi

$$\begin{aligned}
\langle l, m|\mathbf{L}_x^2|l, m\rangle &= \frac{1}{2} \langle l, m| (\mathbf{L}_-\mathbf{L}_+ + \hbar\mathbf{L}_z) |l, m\rangle = \\
&= \frac{1}{2} \langle l, m|\mathbf{L}_-\mathbf{L}_+|l, m\rangle + \frac{m\hbar^2}{2} = \\
&= \frac{\hbar^2}{2} (l (l+1) - m (m+1) + m) = \\
&= \frac{\hbar^2}{2} \left(l (l+1) - m^2\right) = \langle l, m|\mathbf{L}_y^2|l, m\rangle
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare il valor medio, su di un autostato di $\mathbf{L}_z$ e $\mathbf{L}^2$, della componente del momento angolare lungo una direzione $\vec{n}$ che forma un angolo θ rispetto alla direzione z.

Sol: Il versore ha coordinate

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

Ricordiamo che

$$\langle l, m|\mathbf{L}_z|l, m\rangle = \hbar m,$$

$$\langle l, m|\mathbf{L}_x|l, m\rangle = \langle l, m|\mathbf{L}_y|l, m\rangle = 0,$$

e quindi

$$\langle l, m|\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{L}}|l, m\rangle = \hbar m \cos\theta$$

Esercizio 4. Calcolare autovalori e autovettori di $\mathbf{L}_x$ e $\mathbf{L}_y$ nel caso in cui $l = 1$.

Sol: Per simmetria rispetto alla scelta di orientazione degli assi, gli autovalori sono gli stessi di $\mathbf{L}_z$ ossia $m = 0, \pm\hbar$. Gli autostati hanno la forma

$$|\psi\rangle = a_1 |1, 1\rangle + a_0 |1, 0\rangle + a_{-1} |1, -1\rangle$$

$$\mathbf{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori di $\mathbf{L}_x$ sono quindi

$$|1,1\rangle_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \ |1,0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ |1,-1\rangle_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

mentre gli autovettori di $\mathbf{L}_y$ sono

$$|1,1\rangle_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \ |1,0\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ |1,-1\rangle_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Compiti per casa

Esercizio 5. Stimare il valore minimo del prodotto

$$\left\langle (\Delta\mathbf{L}_x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta\mathbf{L}_y)^2 \right\rangle,$$

su di un autostato di $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$. Calcolare esplicitamente tale prodotto per $l = 1$ $m = 0$.

Sol: Per il principio di indeterminazione si ha

$$\left\langle (\Delta\mathbf{L}_x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta\mathbf{L}_y)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle l,m| \left[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y\right] |l,m\rangle \right|^2 = \frac{\hbar^4}{4} m^2.$$

Poiché

$$\langle l,m|\mathbf{L}_x^2|l,m\rangle = \langle l,m|\mathbf{L}_y^2|l,m\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(l\,(l+1) - m^2\right),$$

il minimo di indeterminazione si ha per $m = \pm l$.

Esercizio 6. Un sistema ha momento angolare totale corrispondente a $l = 1$. Dopo aver misurato la componente del momento angolare lungo una direzione $\vec{n}$ che forma un angolo θ rispetto alla direzione z si è ottenuto il risultato $\hbar$. Se successivamente si misura $\mathbf{L}_z$ che risultati si possono ottenere e con che probabilità?

Sol: Consideriamo l'operatore $\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{L}}$ con

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

la cui rappresentazione nel settore con $l = 1$ è

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{\mathbf{L}} &= \frac{\hbar\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} + \hbar\cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta & 0 \\ e^{i\phi}\sin\theta & 0 & e^{-i\phi}\sin\theta \\ 0 & e^{i\phi}\sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dopo la misura, il cui risultato è $\hbar$, il sistema si proietta sull'autostato corrispondente che soddisfa l'equazione

$$\det\left[\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{L}} - \hbar\mathbf{I}\right] = 0.$$

Si ottiene quindi

$$|1,1\rangle_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-i\phi}(\cos\theta + 1) \\ \sqrt{2}\sin\theta \\ e^{i\phi}(-\cos\theta + 1) \end{pmatrix}.$$

Da questo stato, misurando $\mathbf{L}_z$ si ottengono i tre possibili valori $m = 0, \pm 1$ con probabilità

$$p_1 = \frac{(\cos\theta + 1)^2}{4},$$

$$p_0 = \frac{\sin^2\theta}{2},$$

$$p_1 = \frac{(\cos\theta - 1)^2}{4}.$$

Esercizio 7. L'Hamiltoniana di un sistema quantistico è

$$\mathbf{H} = c\mathbf{L}_z.$$

Supponendo che il sistema sia in un autostato di $\mathbf{L}^2$ e di $\mathbf{L}_x$ con autovalori $2\hbar^2$ e zero, dopo quanto tempo il sistema si troverà in un autostato di $\mathbf{L}_y$ con autovalore zero?

Sol: Lo stato iniziale è

$$|\psi(0)\rangle = |1,0\rangle_x .$$

Durante l'evoluzione il sistema rimane in un autostato di $\mathbf{L}^2$ con $l = 1$. Sapendo che gli autovettori di $\mathbf{L}_x$ sono, nella base degli autostati di $\mathbf{L}_z$

$$|1,\pm 1\rangle_x = \frac{|1,1\rangle \pm \sqrt{2}\,|1,0\rangle + |1,-1\rangle}{2},\ |1,0\rangle_x = \frac{|1,1\rangle - |1,-1\rangle}{\sqrt{2}},$$

e gli autovettori di $\mathbf{L}_y$ sono

$$|1,1\rangle_y = \frac{|1,1\rangle \mp i\sqrt{2}\,|1,0\rangle - |1,-1\rangle}{2},\ |1,0\rangle_y = \frac{|1,1\rangle + |1,-1\rangle}{\sqrt{2}},$$

lo stato iniziale si può scrivere come

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|1,1\rangle - |1,-1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

La sua evoluzione è data da

$$|\psi(t)\rangle = e^{-ict}\frac{|1,1\rangle - e^{i2ct}\,|1,-1\rangle}{\sqrt{2}},$$

quindi

$$|\psi(t)\rangle = |1,0\rangle_y ,$$

per $t^* = \frac{\pi}{2c}$.