Esercitazione 08

29 novembre 2024

Composizione del momento angolare

Per due gradi di libertà indipendenti di momento angolare $\vec{\mathbf{L}}_1$ e $\vec{\mathbf{L}}_2$ il commutatore fra le componenti è nullo

$$\left[\mathbf{L}_1^j, \mathbf{L}_2^k\right] = 0,$$

di conseguenza gli operatori $\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_2^2, \mathbf{L}_1^z, \mathbf{L}_2^z$ commutano fra di loro. Il momento angolare totale è dato dalla somma dei due momenti angolari

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2,$$

e si può vedere facilmente che soddisfa le regole di commutazione del momento angolare

$$\left[\mathbf{L}^j, \mathbf{L}^k\right] = \left[\mathbf{L}_1^j, \mathbf{L}_1^k\right] + \left[\mathbf{L}_2^j, \mathbf{L}_2^k\right] = i\hbar\epsilon_{j,k,m}\left(\mathbf{L}_1^m + \mathbf{L}_2^m\right) = i\hbar\epsilon_{j,k,m}\mathbf{L}^m.$$

Ne consegue che

$$\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^z\right] = 0,$$

ma anche

$$\left[\mathbf{L}_j^2, \mathbf{L}^z\right] = \left[\mathbf{L}_j^2, \mathbf{L}_j^z\right] = 0,$$

$$\left[\mathbf{L}_j^2, \mathbf{L}^2\right] = \left[\mathbf{L}_j^2, \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2 + 2\left(\mathbf{L}_1^x\mathbf{L}_2^x + \mathbf{L}_1^y\mathbf{L}_2^y + \mathbf{L}_1^z\mathbf{L}_2^z\right)\right] = 0.$$

Possiamo quindi scegliere due set di operatori indipendenti che commutano CSCO: $\left\{\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_2^2, \mathbf{L}_1^z, \mathbf{L}_2^z\right\}$ oppure $\left\{\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_2^2, \mathbf{L}^2, \mathbf{L}^z\right\}$.

Se fissiamo il valore del quadrato del momento angolare l_1 e l_2 di ciascun grado di libertà, per esempio ponendo $l_1 \geq l_2$, i due CSCO individuano due basi complete ortonormali

$$\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_2^2, \mathbf{L}_1^z, \mathbf{L}_2^z \longrightarrow |l_1, l_2; m_1, m_2\rangle = |m_1, m_2\rangle\,,$$

$$\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_2^2, \mathbf{L}^2, \mathbf{L}^z \longrightarrow |l_1, l_2; l, m\rangle = |l, m\rangle\,.$$

Notare che i vettori della prima base non sono autostati simultanei del secondo CSCO e viceversa, perché

$$\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}_j^z\right] \neq 0.$$

Nel passare da una base all'altra deve valere:

- $m = m_1 + m_2$. Infatti
$$0 = \langle m_1, m_2|\mathbf{L}^z - \mathbf{L}_1^z - \mathbf{L}_2^z|l, m\rangle = \hbar\left(m - m_1 - m_2\right).$$
- Il valore massimo di m è $\bar{m} = l_1 + l_2$ quindi anche il valore massimo di l è $\bar{l} = l_1 + l_2$. Questo significa che
$$|\bar{l}, \bar{m}\rangle = |m_1 = l_1, m_2 = l_2\rangle\,.$$
- I valori possibili di l sono quelli nell'intervallo $l_{min} \leq l \leq l_1 + l_2$ con $l_{min} = |l_1 - l_2|$. Per vederlo possiamo considerare il cambiamento di base nel sottospazio con m, l_1 e l_2 fissati (per semplicità consideriamo $m \geq 0$ e, come sopra, $l_1 \geq l_2$). Nella base $|l, m\rangle$, dato $m = \bar{m} - k$, i possibili stati sono $d = 1 + s^*$ e corrispondono a $|\bar{l}, m\rangle\,, |\bar{l} - 1, m\rangle\,, \ldots |l - s^*, m\rangle$, con $s^* = \min\left(l - l_{min}, k\right)$. Nella base $|m_1, m_2\rangle$ gli stati con m fissato si possono comporre come combinazione lineare degli stati $|m_1 = l_1 - k + n, m_2 = l_2 - n\rangle$ con $n = 0, \ldots, n^*$ con $n^* = \min\left(k, 2l_2\right)$. Perché esista una trasformazione fra le due basi si deve avere $n^* = s^*$ ossia:
  - Se $k \leq 2l_2$ allora $n^* = k$ quindi $s^* = k$
  - Se $k > 2l_2$allora $n^* = 2l_2$ quindi $s^* = l - l_{min} = 2l_2$ da cui deriva che $l_{min} = l_1 - l_2$
- I coefficienti del cambiamento di base possono essere scelti reali.

I coefficienti del cambiamento di base vengono detti **coefficienti di Clebsh-Gordan**

$$|l, m\rangle = \sum_{m_1} \langle m_1, m - m_1|l, m\rangle\, |m_1, m - m_1\rangle = \sum_{m_1} c_{l,m,m_1}\, |m_1, m - m_1\rangle$$

e possono essere ricavati nel seguente modo:

- Partiamo da $l = \bar{l} = l_1 + l_2$ e $\bar{m} = l_1 + l_2$ dove
$$|\bar{l}, \bar{m}\rangle = |l_1, l_2\rangle\,.$$
$$|\bar{l}, -\bar{m}\rangle = |-l_1, -l_2\rangle\,.$$

- Applichiamo gli operatori a scala

$$\mathbf{L}_- \left|\bar{l}, \bar{m}\right\rangle = g_1 \left|\bar{l}, \bar{m}-1\right\rangle = \left(\mathbf{L}_1^- + \mathbf{L}_2^-\right) \left|l_1, l_2\right\rangle = \tilde{c}_{1,0}^{(0)} \left|l_1 - 1, l_2\right\rangle + \tilde{c}_{1,1}^{(0)} \left|l_1, l_2 - 1\right\rangle$$

  da cui si ricava

$$\left|\bar{l}, \bar{m}-1\right\rangle = c_{1,0}^{(0)} \left|l_1 - 1, l_2\right\rangle + c_{1,1}^{(0)} \left|l_1, l_2 - 1\right\rangle . \tag{1}$$

  Proseguendo nello stesso modo applicando

$$\mathbf{L}_-^k \left|\bar{l}, \bar{m}\right\rangle = \left(\mathbf{L}_1^- + \mathbf{L}_2^-\right)^k \left|l_1, l_2\right\rangle ,$$

  si ottengono i coefficienti per $k \leq \bar{m}$

$$\left|\bar{l}, \bar{m}-k\right\rangle = \sum_{n=0}^{\min(2l_2,k)} c_{k,n}^{(0)} \left|l_1 - k + n, l_2 - n\right\rangle$$

$$\left|\bar{l}, -\bar{m}+k\right\rangle = \sum_{n=0}^{\min(2l_2,k)} c_{-k,n}^{(0)} \left|-l_1 + k - n, -l_2 + n\right\rangle .$$

- Passiamo a $l = \bar{l} - 1$ dove

$$\left|\bar{l}-1, \bar{m}-1\right\rangle = c_{1,0}^{(1)} \left|l_1 - 1, l_2\right\rangle + c_{1,1}^{(1)} \left|l_1, l_2 - 1\right\rangle ,$$

  confrontanto con (1)

$$\left\langle \bar{l}, \bar{m}-1 \middle| \bar{l}-1, \bar{m}-1\right\rangle = c_{1,0}^{(0)} c_{1,0}^{(1)} + c_{1,1}^{(0)} c_{1,1}^{(1)} = 0,$$

  e imponendo la normalizzazione, si ottengono i coefficienti voluti. Si prosegue come sopra applicando gli operatori a scala.

- Proseguendo in questo modo si costruiscono le relazioni

$$\left|\bar{l}-s, \bar{m}-k\right\rangle = \sum_{n=0}^{\min(2l_2,k)} c_{k,n}^{(s)} \left|l_1 - k + n, l_2 - n\right\rangle$$

$$\left|\bar{l}, -\bar{m}+k\right\rangle = \sum_{n=0}^{\min(2l_2,k)} c_{1,-k}^{(s)} \left|-l_1 + k - n, -l_2 + n\right\rangle .$$

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. L'Hamiltoniana di un sistema quantistico è

$$\mathbf{H} = c.$$

Supponendo che il sistema sia in un autostato di $\mathbf{L}^2$ e di $\mathbf{L}_x$ con autovalori $2\hbar^2$ e zero, dopo quanto tempo il sistema si troverà in un autostato di $\mathbf{L}_y$ con autovalore zero?

Sol: Lo stato iniziale è

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \left|1, 0\right\rangle_x .$$

Durante l'evoluzione il sistema rimane in un autostato di $\mathbf{L}^2$ con $l = 1$. Sapendo che gli autovettori di $\mathbf{L}_x$ sono, nella base degli autostati di $\mathbf{L}_z$

$$\left|1, \pm 1\right\rangle_x = \frac{\left|1,1\right\rangle \pm \sqrt{2}\left|1,0\right\rangle + \left|1,-1\right\rangle}{2}, \ \left|1,0\right\rangle_x = \frac{\left|1,1\right\rangle - \left|1,-1\right\rangle}{\sqrt{2}},$$

e gli autovettori di $\mathbf{L}_y$ sono

$$\left|1, 1\right\rangle_y = \frac{\left|1,1\right\rangle \mp i\sqrt{2}\left|1,0\right\rangle - \left|1,-1\right\rangle}{2}, \ \left|1,0\right\rangle_y = \frac{\left|1,1\right\rangle + \left|1,-1\right\rangle}{\sqrt{2}},$$

lo stato iniziale si può scrivere come

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{\left|1,1\right\rangle - \left|1,-1\right\rangle}{\sqrt{2}}.$$

La sua evoluzione è data da

$$|\psi(t)\rangle = e^{-ict}\frac{|1,1\rangle - e^{i2ct}|1,-1\rangle}{\sqrt{2}},$$

quindi

$$|\psi(t)\rangle = |1,0\rangle_y\,,$$

per $t^* = \frac{\pi}{2c}$.

Esercizio 2. Un sistema ha momento angolare totale corrispondente a $l = 1$. Dopo aver misurato la componente del momento angolare lungo una direzione $\vec{n}$ che forma un angolo θ rispetto alla direzione z si è ottenuto il risultato $\hbar$. Se successivamente si misura $\mathbf{L}_z$ che risultati si possono ottenere e con che probabilità?

Sol: Consideriamo l'operatore $\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{L}}$ con

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\,,$$

la cui rappresentazione nel settore con $l = 1$ è

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{L}} &= \frac{\hbar\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + \frac{\hbar\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} + \hbar\cos\theta\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta & 0\\ e^{i\phi}\sin\theta & 0 & e^{-i\phi}\sin\theta\\ 0 & e^{i\phi}\sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dopo la misura, il cui risultato è $\hbar$, il sistema si proietta sull'autostato corrispondente che soddisfa l'equazione

$$\det\left[\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{L}} - \hbar\mathbf{I}\right] = 0.$$

Si ottiene quindi

$$|1,1\rangle_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-i\phi}(\cos\theta+1)\\ \sqrt{2}\sin\theta\\ e^{i\phi}(-\cos\theta+1)\end{pmatrix}.$$

Da questo stato, misurando $\mathbf{L}_z$ si ottengono i tre possibili valori $m = 0, \pm 1$ con probabilità

$$p_1 = \frac{(\cos\theta+1)^2}{4},$$

$$p_0 = \frac{\sin^2\theta}{2},$$

$$p_1 = \frac{(\cos\theta-1)^2}{4}.$$

Esercizio 3. Al tempo $t = 0$ la f.d.o. di una particella di spin zero è

$$\psi(\vec{r}, t=0) = \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left(1 + \frac{x+iy+z}{r}\right),$$

con

$$\int_0^\infty dr\, r^2\,|f(r)|^2 = 1$$

1. Quali risultati si possono ottenere facendo una misura di $\mathbf{L}_z$e di $\mathbf{L}^2$ e con quali probabilità?
2. Supponendo che l'Hamiltoniana del sistema sia

$$\mathbf{H} = g\mathbf{L}_z,$$

   con g costante reale, si scriva lo stato al tempo $t > 0$.
3. Calcolare in funzione del tempo $\langle\mathbf{L}_x\rangle$, $\langle\mathbf{L}_y\rangle$, $\langle\mathbf{L}_z\rangle$

Sol: In coordinate sferiche

$$\begin{aligned}\psi(r,\theta,\phi,t=0) &= \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left(1+\cos\phi\sin\theta+i\sin\phi\sin\theta+\cos\theta\right)= \\ &= \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left(1+e^{i\phi}\sin\theta+\cos\theta\right)= \\ &= \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left(\sqrt{4\pi}Y_0^0-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^1+\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\right)= \\ &= f(r)\left(\sqrt{\frac{1}{2}}Y_0^0-\sqrt{\frac{1}{3}}Y_1^1+\sqrt{\frac{1}{6}}Y_1^0\right).\end{aligned}$$

Quindi

$$|\psi\rangle=|f\rangle\left(\sqrt{\frac{1}{2}}|0,0\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}|1,1\rangle+\sqrt{\frac{1}{6}}|1,0\rangle\right).$$

1. Si possono ottenere i seguenti risultati: $L^2=0,2\hbar^2$ e $L_z=0,\hbar$

$$l=0\ P_{l=0}=\frac{1}{2},$$

$$l=1\ P_{l=1}=\frac{1}{2},$$

$$m=0\ P_{m=0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3},$$

$$m=1\ P_{m=1}=\frac{1}{3}.$$

2. Evoluzione temporale:

$$|\psi(t)\rangle=e^{-i\frac{g\mathbf{L}_z}{\hbar}t}|\psi\rangle=|f\rangle\left(\sqrt{\frac{1}{2}}|0,0\rangle-e^{-i\frac{g}{\hbar}t}\sqrt{\frac{1}{3}}|1,1\rangle+\sqrt{\frac{1}{6}}|1,0\rangle\right).$$

3. Medie:

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{L}_x\rangle &= \langle\psi(t)|\frac{\mathbf{L}_++\mathbf{L}_-}{2}|\psi(t)\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{18}}\left(-e^{-igt}\langle 1,0|\mathbf{L}_-|1,1\rangle-e^{igt}\langle 1,1|\mathbf{L}_+|1,0\rangle\right)= \\ &= -\frac{\hbar}{3}\cos gt, \\ \langle\mathbf{L}_y\rangle &= \langle\psi(t)|\frac{\mathbf{L}_+-\mathbf{L}_-}{2i}|\psi(t)\rangle=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{1}{18}}\left(e^{-igt}\langle 1,0|\mathbf{L}_-|1,1\rangle-e^{igt}\langle 1,1|\mathbf{L}_+|1,0\rangle\right)= \\ &= -\frac{\hbar}{3}\sin gt, \\ \langle\mathbf{L}_z\rangle &= \frac{\hbar}{3}\end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare i coefficienti di Clebsch-Gordan per $l_1=1$ e $l_2=\frac{1}{2}$.

Sol: Stati con $l=\frac{3}{2}$

$$\boxed{|l=\frac{3}{2},m=\frac{3}{2}\rangle=|m_1=1,m_2=\frac{1}{2}\rangle}.$$

$$\boxed{|l=\frac{3}{2},m=-\frac{3}{2}\rangle=|m_1=-1,m_2=-\frac{1}{2}\rangle}.$$

$$\mathbf{L}_-|l=\frac{3}{2},m=\frac{3}{2}\rangle=\hbar\sqrt{3}\,|l=\frac{3}{2},m=\frac{1}{2}\rangle.$$

$$\left(\mathbf{L}_1^-+\mathbf{L}_2^-\right)|m_1=1,m_2=\frac{1}{2}\rangle=\hbar\sqrt{2}\,|m_1=0,m_2=\frac{1}{2}\rangle+\hbar\,|m_1=1,m_2=-\frac{1}{2}\rangle,$$

$$\boxed{|l=\frac{3}{2},m=\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|m_1=0,m_2=\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\,|m_1=1,m_2=-\frac{1}{2}\rangle}.$$

$$\mathbf{L}_{-}^{2}\,|l=\frac{3}{2},m=\frac{3}{2}\rangle=\hbar^{2}2\sqrt{3}\,|l=\frac{3}{2},m=-\frac{1}{2}\rangle\,,$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{L}_1^{-}+\mathbf{L}_2^{-}\right)^2|m_1=1,m_2=\frac{1}{2}\rangle &= \hbar\left(\mathbf{L}_1^{-}+\mathbf{L}_2^{-}\right)\left(\sqrt{2}\,|m_1=0,m_2=\frac{1}{2}\rangle+|m_1=1,m_2=-\frac{1}{2}\rangle\right)= \\ &= \hbar^2\left(2\,|m_1=-1,m_2=\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{2}\,|m_1=0,m_2=-\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{2}\,|m_1=0,m_2=-\frac{1}{2}\rangle\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{|l=\frac{3}{2},m=-\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\,|m_1=-1,m_2=\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\,|m_1=0,m_2=-\frac{1}{2}\rangle}\,.$$

Stati con $l=\frac{1}{2}$

$$|l=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2}\rangle=a\,|m_1=0,m_2=\frac{1}{2}\rangle+b\,|m_1=1,m_2=-\frac{1}{2}\rangle\,,$$

$$\langle l=\frac{3}{2},m=\frac{1}{2}|l=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2}\rangle=a\sqrt{\frac{2}{3}}+b\sqrt{\frac{1}{3}}=0,$$

imponendo anche la normalizzazione si ha

$$\boxed{|l=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\,|m_1=0,m_2=\frac{1}{2}\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\,|m_1=1,m_2=-\frac{1}{2}\rangle}\,.$$

$$\mathbf{L}_{-}\,|l=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2}\rangle=\hbar\,|l=\frac{1}{2},m=-\frac{1}{2}\rangle\,,$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{L}_1^{-}+\mathbf{L}_2^{-}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,|m_1=0,m_2=\frac{1}{2}\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\,|m_1=1,m_2=-\frac{1}{2}\rangle\right) &= \\ =\hbar\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|m_1=-1,m_2=\frac{1}{2}\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|m_1=0,m_2=-\frac{1}{2}\rangle\right) &\quad ,\end{aligned}$$

$$\boxed{|l=\frac{1}{2},m=-\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\,|m_1=0,m_2=-\frac{1}{2}\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\,|m_1=-1,m_2=\frac{1}{2}\rangle}\,.$$

Compiti per casa

Esercizio 5. Il momento magnetico dell'elettrone è

$$\vec{\mu}=-\frac{\mu_B}{\hbar}\left[\vec{\mathbf{L}}+2\vec{\mathbf{S}}\right],$$

con $\mu_B=\frac{\hbar|e|}{2m_e}$ magnetone di Bohr. In presenza di un campo magnetico costante esterno, l'energia di interazione è descritta dall'hamltoniana

$$\mathbf{H}=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}.$$

Supponendo che il momento angolare orbitale sia nullo ($l=0$) e che, inizialmente, l'elettrone sia preparato nell'autostato $|\uparrow\rangle$ di $\mathbf{S}_z$ corrispondente all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e indicando con

$$\omega_L=\frac{2\mu_B\left|\vec{B}\right|}{\hbar},$$

la frequenza di Larmor:

1. Scrivere esplicitamente l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale.
2. Trovare l'evoluzione temporale dello stato nel caso in cui $\vec{B}\,||\,\vec{z}$
3. Trovare l'evoluzione temporale dello stato nel caso in cui $\vec{B}=B\left(\sin\theta,0,\cos\theta\right)$
4. Nel caso in cui $\theta=\frac{\pi}{2}$, esprimere lo stato nella base degli autostati dell'energia e calcolare il valor medio $\langle\mathbf{S}_z\left(t\right)\rangle$

Sol: Lo stato iniziale è

$$|\psi(0)\rangle = |R\rangle\,|\ell=0,m=0\rangle\,|\uparrow\rangle$$

dove sono stati isolati i contributi radiale, angolare e di spin.

1. L'operatore di evoluzione temporale è

$$\mathbf{U} = e^{-i\frac{\mathbf{H}}{\hbar}t} = e^{i\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{B}}{\hbar}t} = e^{-i\frac{\mu_B}{\hbar^2}t\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{B}}e^{-i\frac{2\mu_B}{\hbar^2}t\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{B}}.$$

2. La parte orbitale dell'evoluzione temporale è applicata allo stato con momento angolare nullo, per cui non c'è evoluzione di questa componente. Stesso discorco per la componente radiale. L'unica componente che evolve nel tempo è quella di spin.

$$|\chi(t)\rangle = e^{-i\frac{2\mu_B}{\hbar^2}t\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{B}}\,|\uparrow\rangle\,,$$

nel caso in cui $\vec{B}||\vec{z}$

$$|\chi(t)\rangle = e^{-i\frac{2\mu_B B}{\hbar^2}t\mathbf{S}_z}\,|\uparrow\rangle = e^{-i\frac{\omega_L}{2}t}\,|\uparrow\rangle\,,$$

ossia lo stato non evolve (a parte una fase globale).

3. Se $\vec{B} = B(\sin\theta, 0, \cos\theta)$

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{2\mu_B}{\hbar^2}t\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{B}} &= e^{-i\frac{2\mu_B B}{\hbar^2}t(\mathbf{S}_x\sin\theta+\mathbf{S}_z\cos\theta)} = e^{-i\frac{\mu_B B}{\hbar}t(\sigma_x\sin\theta+\sigma_z\cos\theta)} = \\ &= \cos\frac{\omega_L}{2}t - i\left(\sigma_x\sin\theta+\sigma_z\cos\theta\right)\sin\frac{\omega_L}{2}t = \\ &= \cos\frac{\omega_L}{2}t - i\frac{2}{\hbar}\left(\mathbf{S}_x\sin\theta+\mathbf{S}_z\cos\theta\right)\sin\frac{\omega_L}{2}t, \end{aligned}$$

quindi

$$|\chi(t)\rangle = \left(\cos v - i\cos\theta\sin\frac{\omega_L}{2}t\right)|\uparrow\rangle - i\sin\theta\sin\frac{\omega_L}{2}t\,|\downarrow\rangle$$

4. Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ la componenti di Spin dell'Hamiltonianana è

$$\mathbf{H}_S = \frac{2\mu_B B}{\hbar}\mathbf{S}_x,$$

quindi gli autostati dell'energia sono gli autostati di $\mathbf{S}_x$ ossia

$$|\pm\rangle = \frac{|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Lo stato iniziale è quindi

$$|\chi(0)\rangle = \frac{|+\rangle \pm |-\rangle}{\sqrt{2}},$$

e la sua evoluzione

$$\begin{aligned} |\chi(t)\rangle &= \frac{e^{-i\frac{\mu_B B}{\hbar}t}\,|+\rangle \pm e^{i\frac{\mu_B B}{\hbar}t}\,|-\rangle}{\sqrt{2}} = \\ &= \cos\frac{\omega_L t}{2}\,|\uparrow\rangle - i\sin\frac{\omega_L t}{2}\,|\downarrow\rangle\,. \end{aligned}$$

Il valor medio $\langle\mathbf{S}_z(t)\rangle$ è

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{S}_z(t)\rangle &= \langle\chi(t)\,|\mathbf{S}_z|\chi(t)\rangle = \cos^2\frac{\omega_L t}{2} - \sin^2\frac{\omega_L t}{2} = \\ &= \cos\omega_L t. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova in una buca di potenziale infinita in uno stato per cui una misura di energia fornisce con probabilità $\frac{2}{3}$ il valore E_1 e con probabilità $\frac{1}{3}$ il valore E_2.

1. Scrivere lo stato più generale che soddisfi queste condizioni. Quanti parametri reali parametrizzano tale stato?

2. Qual è la probabilità di misurare spin $\uparrow$?

3. Qual è il valor medio $\langle\mathbf{S}_z\rangle$?

Sol:

1. Lo stato generale è
$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}\,|E_1\rangle\,|\chi_1\rangle + e^{i\phi}\,|E_2\rangle\,|\chi_2\rangle}{\sqrt{3}},$$
dove $|\chi_{1,2}\rangle$ sono due stati di spin
$$|\chi_j\rangle = \cos\theta_j\,|\uparrow\rangle + e^{i\nu_j}\sin\theta_j\,|\downarrow\rangle\,.$$
Quindi
$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}\cos\theta_1\,|E_1\rangle\,|\uparrow\rangle + \sqrt{2}e^{i\nu_1}\sin\theta_1\,|E_1\rangle\,|\downarrow\rangle + e^{i\phi}\cos\theta_2\,|E_2\rangle\,|\uparrow\rangle + e^{i(\phi+\nu_2)}\sin\theta_2\,|E_2\rangle\,|\downarrow\rangle}{\sqrt{3}}.$$

2. La probabilità di misurare $\uparrow$ è
$$P_\uparrow = |\langle\psi|\uparrow\rangle|^2 = \frac{2\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2}{3}.$$
Ovviamente
$$P_\downarrow = 1 - P_\uparrow = \frac{2\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2}{3}$$

3. Valor medio:
$$\langle\mathbf{S}_z\rangle = \langle\psi|\mathbf{S}_z|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}\frac{2\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 - 2\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2}{3} = \frac{\hbar}{2}\frac{2\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2}{3}.$$

Esercizio 7. Una particella di spin $\frac{1}{2}$ evolve secondo l'Hamiltoniana (dipendente dal tempo)
$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\mu\sigma_z B_1 & \text{per } 0 \le t \le T \\ \mu\sigma_z B_2 & \text{per } t > T \end{cases}.$$
Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ dove
$$\sigma_x\,|\pm\rangle = \pm\,|\pm\rangle\,.$$

1. Scrivere l'evoluzione temporale dello stato.
2. Determinare B_2 tale che la probabilità di ottenere $-\frac{\hbar}{2}$ in una misura di $\mathbf{S}_y$ al tempo $t = 2T$ sia pari a 1.

Sol: L'operatore di evoluzione temporale è
$$\mathbf{U} = \begin{cases} e^{i\frac{\sigma_z\mu B_1}{\hbar}t} & \text{per } 0 \le t \le T \\ e^{-i\frac{\sigma_z\mu(B_2(t-T)-B_1 T)}{\hbar}} & \text{per } t > T \end{cases},$$
e lo stato iniziale è
$$|\psi(0)\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$
Quindi per $t < T$
$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\frac{\mu B_1 t}{\hbar}}\,|\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\mu B_1 t}{\hbar}}\,|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$
Per $t > T$
$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}\,|\psi(T)\rangle = \frac{e^{i\frac{\mu(B_1 T - B_2(t-T))}{\hbar}}\,|\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\mu(B_1 T - B_2(t-T))}{\hbar}}\,|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$
Gli autostati di σ_y sono
$$|\pm_y\rangle = \frac{|\uparrow\rangle \pm i\,|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}},\ \sigma\,|\pm_y\rangle = \pm\,|\pm_y\rangle\,,$$
$$|\uparrow\rangle = \frac{|+_y\rangle - |-_y\rangle}{\sqrt{2}},\ |\downarrow\rangle = -i\frac{|+_y\rangle - |-_y\rangle}{\sqrt{2}},$$
quindi
$$\begin{aligned} |\psi(2T)\rangle &= \frac{e^{i\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}}\,|\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}}\,|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{e^{i\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}} - ie^{-i\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}}}{2}\,|+_y\rangle - \frac{e^{i\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}} + ie^{-i\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}}}{2}\,|-_y\rangle\,. \end{aligned}$$

Affinché $|\psi(2T)\rangle = e^{i\phi}|-_y\rangle$ si deve avere

$$\left|\frac{e^{i\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}} - ie^{-i\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}}}{2}\right|^2 = \frac{2+i\left(e^{i2\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}} - e^{-i2\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}}\right)}{4} = \frac{1-\sin 2\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar}}{2} = 1,$$

ossia

$$2\frac{\mu(B_1-B_2)T}{\hbar} = -\frac{4n+1}{2}\pi,$$
$$B_2 = B_1 + \frac{4n+1}{4\mu T}\hbar\pi.$$

Esercizio 8. La funzione d'onda di una particella ha la forma

$$\psi(x,y,z) = Axyf(r),$$

con $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e A fattore di normalizzazione. Calcolare i possibili risultati di una misura di $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$ con le rispettive probabilità.

Sol: In coordinate sferiche

$$\psi = \frac{A}{2}r^2 f(r)\sin^2\theta\sin(2\phi) = \frac{A}{2}r^2 f(r)\varphi(\theta,\phi),$$

la parte angolare $|\varphi\rangle$ ha come funzione d'onda

$$\varphi(\theta,\phi) = \sin^2\theta\frac{e^{i2\phi}-e^{-i2\phi}}{2i},$$

ossia

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{2i}\sum_{l=2}^{\infty}\left[c_l|l,m=2\rangle - d_l|l,m=-2\rangle\right].$$

Notiamo che $Y_2^{\pm2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{\pm i2\phi}\sin^2\theta$ quindi

$$\varphi(\theta,\phi) = i\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[Y_2^2(\theta,\phi) - Y_2^{-2}(\theta,\phi)\right].$$

Lo stato del sistema è della forma

$$|\psi\rangle = |R\rangle|\varphi\rangle = |R\rangle\frac{|2,2\rangle - |2,-2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Misurando $\mathbf{L}^2$ si ottiene il risultato $6\hbar$ con probabilità $p_{l=2}=1$, misurando $\mathbf{L}_z$ si ottengoni i due possibili risultati $\pm2\hbar$ entrambi con probabilità $p_{\pm m} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 9. L'Hamiltoniana di un rotatore sferico quantistico dotato di momento di inerzia I è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{L}^2}{2I} + \mu B\mathbf{L}_z.$$

La f.d.o. del sistema al tempo $t=0$ è

$$\psi(\theta,\phi;t=0) = A(\cos\theta + \sin\theta\cos\phi).$$

1. Determinare il valore di A.
2. Determinare in funzione del tempo $\langle\mathbf{L}_x\rangle$
3. Determinare la probabilità che facendo una misura si ottenga

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi, \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}.$$

Sol: Possiamo scrivere la funzione d'onda in termini di armoniche sferiche. Ricordando che

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{\pm i\phi}\sin\theta,$$

si ottiene

$$\psi(\theta,\phi;t=0) = A\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0 - \frac{1}{2}Y_1^1 + \frac{1}{2}Y_1^{-1}\right).$$

1. Normalizzazione:
$$A = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}.$$

2. Lo stato evoluto è
$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-i\left(\frac{\mathbf{L}^2}{2I\hbar}+\frac{\mu B}{\hbar}\mathbf{L}_z\right)t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle\right) = \\
&= e^{-i\frac{\hbar}{I}t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - e^{-i\mu Bt}\frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{2}e^{i\mu Bt}|1,-1\rangle\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{L}_x\rangle &= \langle\psi(t)|\frac{\mathbf{L}_+ + \mathbf{L}_-}{2}|\psi(t)\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{-i\mu Bt}}{2}\langle 1,-1|\mathbf{L}_-|1,0\rangle - \frac{e^{-i\mu Bt}}{2}\langle 1,0|\mathbf{L}_-|1,1\rangle - \frac{e^{i\mu Bt}}{2}\langle 1,1|\mathbf{L}_+|1,0\rangle + \frac{e^{i\mu Bt}}{2}\langle 1,0|\mathbf{L}_+|1,-1\rangle\right) = 0
\end{aligned}$$

3. Probabilità che $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$, e $-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}$:
$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(\cos\theta + \sin\theta\cos(\mu Bt - \phi)\right),$$
$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{3}{8\pi}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2(\mu Bt-\phi) + \cos(\mu Bt - \phi)\sin 2\theta\right)$$

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta\,\sin\theta\,|\psi(x,t)|^2 = \\
&= \frac{3}{8\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta\,\sin\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2(\mu Bt-\phi) + \cos(\mu Bt-\phi)\sin 2\theta\right) = \\
&= \frac{3}{8\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta\,\sin\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2(\mu Bt-\phi)\right) = \\
&= \frac{7\pi + 10\cos 2\mu Bt}{32\sqrt{2}\pi}
\end{aligned}$$