Esercitazione 09

06 dicembre 2024

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Il momento magnetico dell'elettrone è

$$\vec{\mu} = -\frac{\mu_B}{\hbar}\left[\vec{\mathbf{L}} + 2\vec{\mathbf{S}}\right],$$

con $\mu_B = \frac{\hbar|e|}{2m_e}$ magnetone di Bohr. In presenza di un campo magnetico costante esterno, l'energia di interazione è descritta dall'hamltoniana

$$\mathbf{H} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}.$$

Supponendo che il momento angolare orbitale sia nullo ($l = 0$) e che, inizialmente, l'elettrone sia preparato nell'autostato $|\uparrow\rangle$ di $\mathbf{S}_z$ corrispondente all'autovalore $\frac{\hbar}{2}$ e indicando con

$$\omega_L = \frac{2\mu_B\left|\vec{B}\right|}{\hbar},$$

la frequenza di Larmor:

1. Scrivere esplicitamente l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale.
2. Trovare l'evoluzione temporale dello stato nel caso in cui $\vec{B}\,||\,\vec{z}$
3. Trovare l'evoluzione temporale dello stato nel caso in cui $\vec{B} = B\left(\sin\theta, 0, \cos\theta\right)$
4. Nel caso in cui $\theta = \frac{\pi}{2}$, esprimere lo stato nella base degli autostati dell'energia e calcolare il valor medio $\langle\mathbf{S}_z\left(t\right)\rangle$

Sol: Lo stato iniziale è

$$|\psi\left(0\right)\rangle = |R\rangle\,|\ell = 0, m = 0\rangle\,|\uparrow\rangle$$

dove sono stati isolati i contributi radiale, angolare e di spin.

1. L'operatore di evoluzione temporale è

$$\mathbf{U} = e^{-i\frac{\mathbf{H}}{\hbar}t} = e^{i\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{B}}{\hbar}t} = e^{-i\frac{\mu_B}{\hbar^2}t\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{B}}e^{-i\frac{2\mu_B}{\hbar^2}t\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{B}}.$$

2. La parte orbitale dell'evoluzione temporale è applicata allo stato con momento angolare nullo, per cui non c'è evoluzione di questa componente. Stesso discorco per la componente radiale. L'unica componente che evolve nel tempo è quella di spin.

$$|\chi\left(t\right)\rangle = e^{-i\frac{2\mu_B}{\hbar^2}t\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{B}}\,|\uparrow\rangle\,,$$

nel caso in cui $\vec{B}\,||\,\vec{z}$

$$|\chi\left(t\right)\rangle = e^{-i\frac{2\mu_B B}{\hbar^2}t\mathbf{S}_z}\,|\uparrow\rangle = e^{-i\frac{\omega_L}{2}t}\,|\uparrow\rangle\,,$$

ossia lo stato non evolve (a parte una fase globale).

3. Se $\vec{B} = B\left(\sin\theta, 0, \cos\theta\right)$

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{2\mu_B}{\hbar^2}t\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{B}} &= e^{-i\frac{2\mu_B B}{\hbar^2}t(\mathbf{S}_x\sin\theta+\mathbf{S}_z\cos\theta)} = e^{-i\frac{\mu_B B}{\hbar}t(\sigma_x\sin\theta+\sigma_z\cos\theta)} = \\ &= \cos\frac{\omega_L}{2}t - i\left(\sigma_x\sin\theta + \sigma_z\cos\theta\right)\sin\frac{\omega_L}{2}t = \\ &= \cos\frac{\omega_L}{2}t - i\frac{2}{\hbar}\left(\mathbf{S}_x\sin\theta + \mathbf{S}_z\cos\theta\right)\sin\frac{\omega_L}{2}t, \end{aligned}$$

quindi

$$|\chi\left(t\right)\rangle = \left(\cos v - i\cos\theta\sin\frac{\omega_L}{2}t\right)|\uparrow\rangle - i\sin\theta\sin\frac{\omega_L}{2}t\,|\downarrow\rangle$$

4. Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ la componenti di Spin dell'Hamiltonianana è

$$\mathbf{H}_S = \frac{2\mu_B B}{\hbar}\mathbf{S}_x,$$

quindi gli autostati dell'energia sono gli autostati di $\mathbf{S}_x$ ossia

$$|\pm\rangle = \frac{|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Lo stato iniziale è quindi

$$|\chi(0)\rangle = \frac{|+\rangle \pm |-\rangle}{\sqrt{2}},$$

e la sua evoluzione

$$\begin{aligned} |\chi(t)\rangle &= \frac{e^{-i\frac{\mu_B B}{\hbar}t}|+\rangle \pm e^{i\frac{\mu_B B}{\hbar}t}|-\rangle}{\sqrt{2}} = \\ &= \cos\frac{\omega_L t}{2}|\uparrow\rangle - i\sin\frac{\omega_L t}{2}|\downarrow\rangle . \end{aligned}$$

Il valor medio $\langle \mathbf{S}_z(t)\rangle$ è

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_z(t)\rangle &= \langle \chi(t)|\mathbf{S}_z|\chi(t)\rangle = \cos^2\frac{\omega_L t}{2} - \sin^2\frac{\omega_L t}{2} = \\ &= \cos\omega_L t. \end{aligned}$$

Esercizio 2. L'Hamiltoniana di una particella di spin $\frac{1}{2}$ e massa m vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{L}^2}{2mR^2} + \frac{2\omega}{\hbar}\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}.$$

- $\mathbf{L}^2$ è una quantità conservata?
- $\mathbf{L}_z$ è una quantità conservata?

All'istante $t = 0$ lo stato della particella è rappresentato dal seguente spinore

$$\psi(t=0) = Y_1^0(\theta,\phi)\,\chi_+$$

con χ_+ autostato di $\mathbf{S}_z$ con autovalore $\frac{\hbar}{2}$.

- Determinare l'evoluzione temporale $\psi(t)$
- Determinare in funzione di t la probabilità di trovare la particella con $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$

Sol:

- Usiamo la relazione

  $$\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}} = \frac{\left(\vec{\mathbf{L}}+\vec{\mathbf{S}}\right)^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2}{2} = \frac{\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2}{2},$$

  dalla quale si vede che $\left[\mathbf{H},\mathbf{L}^2\right] = 0$.
- La componente lungpo z non si conserva perché

  $$\left[\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}},\mathbf{L}_z\right] = \mathbf{S}_x[\mathbf{L}_x,\mathbf{L}_z] + \mathbf{S}_y[\mathbf{L}_y,\mathbf{L}_z] \neq 0.$$

- Gli autostati dell'Hamiltoniana sono gli stati autostati simultanei di $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}_z$

  $$\left|l, s=\frac{1}{2}; j, j_z\right\rangle,$$

  con energie

  $$E_{l,j} = \hbar^2\left[l(l+1)\left(\frac{1}{2mR^2} - \frac{\omega}{\hbar}\right) + \frac{\omega}{\hbar}j(j+1) - \frac{3\omega}{4\hbar}\right].$$

  In tale base lo stato iniziale è

  $$|\psi(0)\rangle = \left|l=1, s=\frac{1}{2}; m=0, s_z=\frac{1}{2}\right\rangle = a_1\left|1,\frac{1}{2}; j=\frac{3}{2}, j_z=\frac{1}{2}\right\rangle + a_2\left|1,\frac{1}{2}; j=\frac{1}{2}, j_z=\frac{1}{2}\right\rangle.$$

  Sapendo che

  $$\begin{aligned} \left|j=\frac{3}{2}, j_z=\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left|m=0, s_z=\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|m=1, s_z=-\frac{1}{2}\right\rangle, \\ \left|j=\frac{1}{2}, j_z=\frac{1}{2}\right\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}}\left|m=0, s_z=\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|m=1, s_z=-\frac{1}{2}\right\rangle, \end{aligned}$$

otteniamo

$$|m=0,s_z=\frac{1}{2}\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|j=\frac{3}{2},j_z=\frac{1}{2}\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|j=\frac{1}{2},j_z=\frac{1}{2}\rangle\,.$$

L'evoluzione dello stato è quindi

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{E_{1,\frac{3}{2}}-E_{1,\frac{1}{2}}}{\hbar}t}\,|j=\frac{3}{2},j_z=\frac{1}{2}\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|j=\frac{1}{2},j_z=\frac{1}{2}\rangle=\\ &= -\sqrt{\frac{1}{3}}\,|j=\frac{1}{2},j_z=\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i3\omega t}\,|j=\frac{3}{2},j_z=\frac{1}{2}\rangle\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(t) &= +\frac{1}{3}Y_1^0(\theta,\phi)\,\chi_+-\frac{\sqrt{2}}{3}Y_1^1(\theta,\phi)\,\chi_-+\frac{2}{3}e^{-i3\omega t}Y_1^0(\theta,\phi)\,\chi_++\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i3\omega t}Y_1^1(\theta,\phi)\,\chi_-=\\ &= \frac{\left(1+2e^{-i3\omega t}\right)Y_1^0(\theta,\phi)\,\chi_++\sqrt{2}\left(-1+e^{-i3\omega t}\right)Y_1^1(\theta,\phi)\,\chi_-}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\left(s_z=-\frac{\hbar}{2},0<\theta<\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\left|-1+e^{-i3\omega t}\right|^2}{9}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\,\sin\theta\left|Y_1^1(\theta,\phi)\right|^2=\\ &= \frac{2}{3}(1-\cos 3\omega t)\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\,\sin\theta\cos^2\theta=\\ &= \frac{2}{3}(1-\cos 3\omega t)\int_1^{-\frac{1}{2}}dx\,x^2=\frac{7(1-\cos 3\omega t)}{36}\end{aligned}$$

Esercizio 3. Un atomo di idrogeno è posto in un potenziale

$$\mathbf{V}=-g\left(\vec{\mathbf{L}}+2\vec{\mathbf{S}}\right)\cdot\vec{B}$$

dove $\vec{B}$ è un campo magnetico esterno che assumiamo diretto lungo z.

1. L'Hamiltoniana di perturbazione commuta con l'Hamitoniana dell'atomo di Idrogeno imperturbato?
2. Quale degenerazione è rimossa dalla perturbazione?

Sol: L'Hamiltoniana totale è

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{cm}+\mathbf{H}_H-g\left(\mathbf{L}_z+2\mathbf{S}_z\right)B,$$

sappiamo che l'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno è funzione di $\mathbf{L}^2$ e non dipende dallo spin per cui

$$[\mathbf{H}_H,\mathbf{L}_z]=[\mathbf{H}_H,\mathbf{S}_z]=0,$$

quindi

$$[\mathbf{H}_H,\mathbf{V}]=0.$$

Il potenziale rimuove parzialmente la degenerazione di spin e quella in L_z. Le nuove energie sono

$$E_{n,m,\sigma}=\frac{E_1}{n^2}-g\hbar B\,(m+\sigma)\,.$$

Compiti per casa

Esercizio 4. Lo stato di una particella in una dimensione di spin $\frac{1}{2}$ è dato dallo spinore

$$\vec{\psi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_\uparrow(x)\\ \psi_\downarrow(x)\end{pmatrix},$$

con

$$\psi_{\uparrow,\downarrow}(x)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{(x\mp x_0)^2}{4\sigma^2}}.$$

1. Scrivere il vettore astratto $|\psi\rangle$ associato a tale stato
2. Calcolare i correlatori
$$C_1 = \langle\psi|\mathbf{x}\sigma_z|\psi\rangle - \langle\psi|\mathbf{x}|\psi\rangle\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle\,,$$
$$C_2 = \langle\psi|\mathbf{x}\sigma_x|\psi\rangle - \langle\psi|\mathbf{x}|\psi\rangle\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle\,.$$
3. Calcolare la probabilità che su tale stato una misura di $\mathbf{S}_z$ dia il valore di $\frac{\hbar}{2}$
4. Calcolare la probabilità di trovare la particella in $x \geq 0$

Sol:

1. Vettore astratto
$$|\psi\rangle = \frac{|\psi_\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\psi_\downarrow\rangle|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$
2. Correlatori:
$$\langle\psi|\mathbf{x}|\psi\rangle = \frac{\langle\psi_\uparrow|\mathbf{x}|\psi_\uparrow\rangle + \langle\psi_\downarrow|\mathbf{x}|\psi_\downarrow\rangle}{2} = 0,$$
$$\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle = \frac{\langle\psi_\uparrow|\psi_\uparrow\rangle - \langle\psi_\downarrow|\psi_\downarrow\rangle}{2} = 0,$$
$$\begin{aligned}\langle\psi_\uparrow|\psi_\downarrow\rangle &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{(x+x_0)^2+(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2+x_0^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}},\end{aligned}$$
$$\langle\psi_\uparrow|\mathbf{x}|\psi_\downarrow\rangle = \frac{e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0,$$
$$\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle = \frac{\langle\psi_\uparrow|\psi_\downarrow\rangle + \langle\psi_\downarrow|\psi_\uparrow\rangle}{2} = e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}},$$
$$\langle\psi|\mathbf{x}\sigma_z|\psi\rangle = \frac{\langle\psi_\uparrow|\mathbf{x}|\psi_\uparrow\rangle - \langle\psi_\downarrow|\mathbf{x}|\psi_\downarrow\rangle}{2} = x_0,$$
$$\langle\psi|\mathbf{x}\sigma_x|\psi\rangle = \frac{\langle\psi_\uparrow|\mathbf{x}|\psi_\downarrow\rangle + \langle\psi_\downarrow|\mathbf{x}|\psi_\uparrow\rangle}{2} = 0,$$
$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = 0.$$
3. Probabilità di $m = \frac{1}{2}$:
$$P_{\frac{1}{2}} = \langle\psi|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\psi\rangle = \frac{1}{2}|\langle\psi_\uparrow|\psi_\uparrow\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$
4. Probabilità di $x \geq 0$:
$$\begin{aligned}P_{x\geq 0} &= \int_0^{\infty} dx\,\langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} dx\,(\langle\psi_\uparrow|x\rangle\langle x|\psi_\uparrow\rangle + \langle\psi_\downarrow|x\rangle\langle x|\psi_\downarrow\rangle) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} dx\left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_0^{\infty} dx\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}} + \int_{-\infty}^{0} ds\, e^{-\frac{(s-x_0)^2}{2\sigma^2}}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 5. Un fascio di particelle di spin $\frac{1}{2}$ incide con energia E, proveniendo da sinistra, su di un potenziale dato da
$$\mathbf{V} = \frac{2V_0}{\hbar}\theta(\mathbf{x})\,\mathbf{S}_z, \quad V_0 > 0.$$
Sapendo che il fascio incidente ha spin polarizzato lungo x determinare il coefficiente di riflessione e di trasmissione nei due casi $E = 2V_0$ e $E = \frac{V_0}{2}$.

Sol: Iniziamo ricordando che la corrente di probabilità si ricava a partire dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho (x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j(x,t) = 0,$$

dalla quale deriva

$$j(x,t) = -\int dx \, \frac{\partial \rho (x,t)}{\partial t}.$$

Nel nostro caso lo stato è descritto da uno spinore

$$\chi(x) = \begin{pmatrix} \alpha \psi_\uparrow (x) \\ \beta \psi_\downarrow (x) \end{pmatrix},$$

con α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ e $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\psi_\sigma (x)|^2 = 1$. La densità di probabilità è una funzione di due variabili

$$\rho(x,\sigma) = \alpha^2 |\psi_\uparrow (x)|^2 \delta(\sigma - 1) + \beta^2 |\psi_\downarrow (x)|^2 \delta(\sigma + 1),$$

la cui marginale è

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \, \rho(x,\sigma) = \alpha^2 |\psi_\uparrow (x)|^2 + \beta^2 |\psi_\downarrow (x)|^2 .$$

La corrente di probabilità è quindi

$$j(x,t) = -\alpha^2 \int dx \, \frac{\partial |\psi_\uparrow (x)|^2}{\partial t} + \beta^2 \int dx \, \frac{\partial |\psi_\downarrow (x)|^2}{\partial t} = \alpha^2 j_\uparrow (x,t) + \beta^2 j_\downarrow (x,t).$$

Tornando al problema, l'onda incidente è data da

$$\chi_i (x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ e corrispondente a una corrente

$$j_i = \frac{\hbar}{m} k.$$

Per quanto riguarda le componenti riflessa e trasmessa vediamo singolarmente i due casi.

- $E = 2V_0$. Per le due componenti dello spinore abbiamo (ponendo $\sigma = \pm 1$)

$$\psi_\sigma (x) = \begin{cases} e^{ikx} + A_\sigma e^{-ikx} & x < 0 \\ B_\sigma e^{iq_\sigma x} & x > 0 \end{cases}$$

con $k = \frac{\sqrt{4mV_0}}{\hbar}$, $q_1 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$, $q_{-1} = \frac{\sqrt{6mV_0}}{\hbar}$. Dalle condizioni di raccordo si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} 1 + A_\sigma &= B_\sigma, \\ 1 - A_\sigma &= \frac{q_\sigma}{k} B_\sigma, \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono

$$A_\sigma = \frac{k - q_\sigma}{k + q_\sigma}, \; B_\sigma = \frac{2k}{k + q_\sigma},$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}, \; B_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$A_{-1} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = -5 + 2\sqrt{6}, \; B_{-1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = -4 + 2\sqrt{6},$$

La corrente riflessa è

$$\begin{aligned} j_r &= -\frac{\hbar}{2m} k \left(|A_1|^2 + |A_{-1}|^2 \right) = \\ &= -\frac{\hbar}{2m} k \left(66 - 12\sqrt{2} - 20\sqrt{6} \right) = \\ &= -\frac{\hbar}{m} k \left(33 - 6\sqrt{2} - 10\sqrt{6} \right), \end{aligned}$$

$$R = \left|\frac{j_r}{j_i}\right| = 33 - 6\sqrt{2} - 10\sqrt{6}$$

quella trasmessa

$$\begin{aligned} j_t &= \frac{\hbar}{2m}\left(q_1\left|B_1\right|^2 + q_{-1}\left|B_{-1}\right|^2\right) = \\ &= \frac{\hbar\sqrt{4mV_0}}{m}\left(-32 + 6\sqrt{2} + 10\sqrt{6}\right), \end{aligned}$$

$$T = \left|\frac{j_t}{j_i}\right| = -32 + 6\sqrt{2} + 10\sqrt{6}$$

- $E = \frac{V_0}{2}$. Per le due componenti dello spinore abbiamo

$$\psi_1(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A_1 e^{-ikx} & x < 0 \\ B_1 e^{-q_1 x} & x > 0 \end{cases}$$

$$\psi_{-1}(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A_{-1} e^{-ikx} & x < 0 \\ B_{-1} e^{iq_{-1} x} & x > 0 \end{cases}$$

con $q_1 = k = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}$, $q_{-1} = \frac{\sqrt{3mV_0}}{\hbar}$. Dalle condizioni di raccordo si ottiene

$$\begin{aligned} 1 + A_1 &= B_1, \\ 1 - A_1 &= iB_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + A_{-1} &= B_{-1}, \\ 1 - A_{-1} &= \frac{q_{-1}}{k}B_{-1}, \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono

$$A_1 = \frac{1-i}{1+i} = -i,\ B_1 = \frac{2}{1+i} = 1 - i,$$

$$A_{-1} = \frac{k - q_{-1}}{k + q_{-1}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -2 + \sqrt{3},\ B_{-1} = -1 + \sqrt{3}.$$

La corrente riflessa è

$$\begin{aligned} j_r &= -\frac{\hbar}{2m}k\left(\left|A_1\right|^2 + \left|A_{-1}\right|^2\right) = \\ &= -\frac{\sqrt{mV_0}}{m}\left(4 - 2\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

$$R = \left|\frac{j_r}{j_i}\right| = 4 - 2\sqrt{3},$$

quella trasmessa

$$\begin{aligned} j_t &= \frac{\hbar}{2m}q_{-1}\left|B_{-1}\right|^2 = \\ &= \frac{\sqrt{mV_0}}{m}\sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{mV_0}}{m}\left(2\sqrt{3} - 3\right), \end{aligned}$$

$$T = \left|\frac{j_t}{j_i}\right| = 2\sqrt{3} - 3.$$

Esercizio 6. L'Hamiltoniana di due particelle distinguibili con spin $s_1 = s_2 = 1$ è

$$\mathbf{H} = -g\vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2, \qquad \text{con } g > 0$$

Determinare gli autovalori e lo stato fondamentale con relativa degenerazione. Cosa cambia se si aggiunge il termine nell'hamiltoniana

$$-B\left(\mathbf{S}_{1z} + \mathbf{S}_{2z}\right).$$

Sol: Notiamo che

$$\left(\vec{\mathbf{S}}_1+\vec{\mathbf{S}}_2\right)^2=\left(\vec{\mathbf{S}}_1^2+\vec{\mathbf{S}}_2^2+2\vec{\mathbf{S}}_1\cdot\vec{\mathbf{S}}_2\right),$$

quindi

$$\vec{\mathbf{S}}_1\cdot\vec{\mathbf{S}}_2=\frac{\left(\vec{\mathbf{S}}_1+\vec{\mathbf{S}}_2\right)^2-\vec{\mathbf{S}}_1^2-\vec{\mathbf{S}}_2^2}{2}.$$

Gli autostati di questo operatore sono quindi gli autostati simultanei di $\left(\vec{\mathbf{S}}_1+\vec{\mathbf{S}}_2\right)^2$, $\vec{\mathbf{S}}_1^2$, $\vec{\mathbf{S}}_2^2$

$$|1,1;l,m\rangle,$$

con $l=0,1,2$ e $m=-l,\ldots,l$. L'Hamiltoniana si può scrivere come

$$\mathbf{H}=-g\hbar^2\frac{\left(\vec{\mathbf{S}}_1+\vec{\mathbf{S}}_2\right)^2-\vec{\mathbf{S}}_1^2-\vec{\mathbf{S}}_2^2}{2},$$

per cui i suoi autostati sono

$$E\left(l,m\right)=-g\hbar^2\frac{l\left(l+1\right)-4}{2},$$

e hanno degenerazione $d=2l+1$. Lo stato fondamentale ha energia

$$E_0=E\left(2,m\right)=-g\hbar,$$

con degenerazione $d=5$. Introducendo il termine ulteriore, la degenrazione si rompe, le energie diventano

$$E\left(l,m\right)=-g\hbar^2\frac{l\left(l+1\right)-4}{2}-B\hbar m,$$

quindi lo stato fondamentale non è più degenere ed ha energia

$$E_0=E\left(2,2\right)=-\left(g\hbar^2+2B\right).$$

Esercizio 7. Due rotatori liberi distinguibili hanno Hamitoniana

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{L}_1^2}{2I_1}+\frac{\mathbf{L}_2^2}{2I_2}.$$

1. Stabilire se $\mathbf{H}$ commuta con $\mathbf{L}_z=\mathbf{L}_{z1}+\mathbf{L}_{z2}$ e con $\mathbf{L}^2=\left|\vec{\mathbf{L}}_1+\vec{\mathbf{L}}_2\right|^2$.
2. Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo eccitato in funzione dei valori di $I_{1,2}$.

Sol:

$$\left[\mathbf{L}_1^2,\mathbf{L}_{z1}\right]=\left[\mathbf{L}_1^2,\mathbf{L}_{z2}\right]=0,$$
$$\left[\mathbf{L}_1^2,\mathbf{L}^2\right]=\left[\mathbf{L}_2^2,\mathbf{L}^2\right]=0.$$

Autostati

$$|l_1,l_2;m_1,m_2\rangle,$$

(oppure $|l_1,l_2;l,m\rangle$, ma non conviene usare questa base)

$$E_{l_1,l_2}=\frac{l_1\left(l_1+1\right)}{2I_1}+\frac{l_2\left(l_2+1\right)}{2I_2}.$$

Lo stato fondamentale ha energia

$$E_{0,0}=0,$$

e non è degenere. Il primo stato eccitato è:

- Se $I_1>I_2$

  $$E_{1,0}=\frac{1}{I_1},$$

  ed ha degenerazione 3.
- Se $I_1<I_2$

  $$E_{0,1}=\frac{1}{I_2},$$

  ed ha degenerazione 3.
- Se $I_1=I_2=I$

  $$E=\frac{1}{I}$$

  e ha degenerazione 6