

Esercitazione 10

13 dicembre 2024

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Una misura di momento angolare orbitale lungo un asse nell'atomo di idrogeno fornisce sempre il valore $7\hbar$. Determinare il valore minimo che può fornire una misura di energia su tale stato.

Sol: Lo stato è una combinazione del tipo

$$|\psi\rangle = \sum_{n=8}^{\infty} \sum_{l=7}^{n-1} c_{n,l} |n, l, 7\rangle.$$

Una misura di energia può fornire il valore minimo

$$E_8 = -\frac{E_1}{64}.$$

Esercizio 2. Una particella di massa m è sottoposta ad un potenziale armonico isotropo bidimensionale di frequenza propria ω . Tale potenziale è perturbato dal termine

$$\mathbf{V} = -\lambda \mathbf{x} \mathbf{y}$$

con λ costante positiva.

1. Determinare la correzione al primo ordine non nullo allo stato fondamentale ed al primo eccitato
2. Quale degenerazione è rotta dalla perturbazione?

Sol: L'Hamiltoniana imperturbata del sistema è

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) = \hbar\omega (\mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y + 1),$$

$$[\mathbf{H}_0, \mathbf{L}_z] = 0.$$

Lo stato fondamentale imperturbato è

$$|E_0^{(0)}\rangle = |0\rangle_x |0\rangle_y, \quad E_0^{(0)} = \hbar\omega.$$

Il primo stato eccitato è degenero

$$|E_{1,1}^{(0)}\rangle = |0\rangle_x |1\rangle_y, \quad |E_{1,2}^{(0)}\rangle = |1\rangle_x |0\rangle_y, \quad E_1^{(0)} = 2\hbar\omega.$$

1. Teoria perturbativa

$$E_0^{(1)} = \langle E_0^{(0)} | \mathbf{V} | E_0^{(0)} \rangle = -\frac{\lambda\ell^2}{2} \langle 0 | (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_x^\dagger) (\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_y^\dagger) | 0 \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} |E_0^{(1)}\rangle &= -\sum_{n,m} \frac{\langle n, m | \mathbf{V} | 0, 0 \rangle}{\hbar\omega (n+m)} |n, m\rangle = \\ &= \frac{\lambda\ell^2}{2} \sum_{n,m} \frac{\langle n, m | \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y^\dagger | 0, 0 \rangle}{\hbar\omega (n+m)} |n, m\rangle = \\ &= \frac{\lambda\ell^2}{4\hbar\omega} |1, 1\rangle, \end{aligned}$$

$$E_0^{(2)} = \langle E_0^{(0)} | \mathbf{V} | E_0^{(1)} \rangle = -\frac{\lambda^2 \ell^4}{8\hbar\omega}$$

Il primo stato eccitato è degenero per cui nel sottospazio corrispondente la perturbazione è rappresentata dalla matrice

$$\mathbf{V} = -\frac{\lambda\ell^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalori $\pm \frac{\lambda\ell^2}{2}$. Le correzioni allo stato eccitato sono quindi

$$E_{1,1}^{(1)} = -\frac{\lambda\ell^2}{2}, \quad E_{1,2}^{(1)} = \frac{\lambda\ell^2}{2}.$$

Le correzioni allo stato eccitato sono gli autovettori della matrice

$$\begin{aligned} |E_{1,1}^{(1)}\rangle &= \frac{|E_{1,1}^{(0)}\rangle + |E_{1,2}^{(0)}\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |E_{1,2}^{(1)}\rangle &= \frac{|E_{1,1}^{(0)}\rangle - |E_{1,2}^{(0)}\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2. Possiamo introdurre gli operatori

$$\mathbf{a}_{\pm} = \frac{\mathbf{a}_x \pm i\mathbf{a}_y}{\sqrt{2}},$$

in termini dei quali

$$\mathbf{H}_0 = \hbar\omega \left(\mathbf{a}_+^\dagger \mathbf{a}_+ + \mathbf{a}_-^\dagger \mathbf{a}_- + 1 \right),$$

$$\mathbf{L}_z = -\hbar \left(\mathbf{a}_+^\dagger \mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-^\dagger \mathbf{a}_- \right).$$

Gli stati imperturbati possono essere scelti come stati simultanei di $\mathbf{H}_0$ e $\mathbf{L}_z$. La perturbazione rimuove la simmetria per rotazione intorno a z , per cui la nuova Hamiltoniana non commuta più con $\mathbf{L}_z$. Rimuovendo questa simmetria si rompe la degenerazione.

Esercizio 3. Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova inizialmente nell'autostato dello spin lungo l'asse z corrispondente all'autovalore $\hbar/2$. Lo spin evolve secondo l'Hamiltoniana

$$\mathbf{H} = -\epsilon \hat{n} \cdot \vec{\sigma},$$

dove $\hat{n}$ è un versore che individua una direzione inclinata di 45° rispetto all'asse positivo di z .

1. σ_z è un acostante del moto?
2. Quale è il periodo associato all'evoluzione dello stato?

Sol:

1. $[\mathbf{H}, \sigma_z] \neq 0$ quindi σ_z non è una costante del moto.
2. Operatore di evoluzione temporale:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= e^{-i\frac{\mathbf{H}}{\hbar}t} = \mathbf{I} \cos \frac{\epsilon}{\hbar}t - \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\epsilon}{\hbar}t = \\ &= \mathbf{I} \cos \frac{\epsilon}{\hbar}t - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}} \sin \frac{\epsilon}{\hbar}t. \end{aligned}$$

$$\mathbf{U} |\uparrow\rangle = \left(\cos \frac{\epsilon}{\hbar}t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\epsilon}{\hbar}t \right) |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\epsilon}{\hbar}t |\downarrow\rangle.$$

Periodo:

$$\frac{\epsilon}{\hbar}T = \pi \Rightarrow T = \frac{\pi\hbar}{\epsilon}.$$

Esercizio 4. Due rotatori liberi distinguibili hanno Hamiltoniana

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{L}_1^2}{2I_1} + \frac{\mathbf{L}_2^2}{2I_2}.$$

1. Stabilire se $\mathbf{H}$ commuta con $\mathbf{L}_z = \mathbf{L}_{z1} + \mathbf{L}_{z2}$ e con $\mathbf{L}^2 = |\vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2|^2$.
2. Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo eccitato in funzione dei valori di $I_{1,2}$.

Sol:

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_{z1}] &= [\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_{z2}] = 0, \\ [\mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}^2] &= [\mathbf{L}_2^2, \mathbf{L}^2] = 0. \end{aligned}$$

Autostati

$$|l_1, l_2; m_1, m_2\rangle,$$

(oppure $|l_1, l_2; l, m\rangle$, ma non conviene usare questa base)

$$E_{l_1, l_2} = \hbar^2 \left(\frac{l_1(l_1+1)}{2I_1} + \frac{l_2(l_2+1)}{2I_2} \right).$$

Lo stato fondamentale ha energia

$$E_{0,0} = 0,$$

e non è degenere. Il primo stato eccitato è:

- Se $I_1 > I_2$

$$E_{1,0} = \frac{\hbar^2}{I_1},$$

ed ha degenerazione 3.

- Se $I_1 < I_2$

$$E_{0,1} = \frac{\hbar^2}{I_2},$$

ed ha degenerazione 3.

- Se $I_1 = I_2 = I$

$$E = \frac{\hbar^2}{I}$$

e ha degenerazione 6

Compiti per casa

Esercizio 5. Oscillatore armonico tridimensionale. Calcolare le energie e gli autostati dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{r}^2.$$

Descrivere lo stato fondamentale e il primo eccitato in termini di autostati del momento angolare e nella loro rappresentazione in termini di (n_x, n_y, n_z) .

Sol: Possiamo scomporre l'Hamiltoniana in tre oscillatori armonici lungo le tre direzioni

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_y + \mathbf{H}_z,$$

$$\mathbf{H}_j = \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{q}_j^2,$$

e quindi definire la base

$$|n_x, n_y, n_z\rangle = |n_x\rangle |n_y\rangle |n_z\rangle.$$

Poiché l'Hamiltoniana è separabile, i vettori di tale base sono anche autostati dell'energia

$$\mathbf{H} |n_x, n_y, n_z\rangle = E_{n_x, n_y, n_z} |n_x, n_y, n_z\rangle,$$

con

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right).$$

Ovviamente, tutti gli stati con $n_x + n_y + n_z = n$ sono degeneri con degenerazione $d = \binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Possiamo scrivere

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{n} + \frac{3}{2} \right),$$

con $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_y + \mathbf{n}_z$. Notiamo che abbiamo a che fare con un potenziale centrale e l'equazione di Schroedinger si può scrivere in coordinate sferiche come

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{m\omega^2}{2} r^2 + \frac{1}{r^2 2m} L^2(\theta, \phi) \right] \psi = E\psi,$$

per cui la funzione d'onda si può separare in una parte radiale ed una angolare

$$\psi = R_l(r) Y_l^m(\theta, \phi).$$

Come per tutti i potenziali centrali, $[\mathbf{H}, \mathbf{L}^2] = [\mathbf{H}, \mathbf{L}_z] = 0$ e quindi anche $[\mathbf{n}, \mathbf{L}^2] = [\mathbf{n}, \mathbf{L}_z] = 0$. Possiamo quindi scegliere una nuova base di autostati simultanei di $\mathbf{n}, \mathbf{L}^2, \mathbf{L}_z$

$$|n, l, m\rangle.$$

In questo caso il momento angolare è conservato, per cui lo stato fondamentale è

$$|n=0, l=0, m=0\rangle = |n_x=0, n_y=0, n_z=0\rangle.$$

La funzione d'onda corrispondente è

$$\langle x, y, z | n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\ell^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}},$$

e, come previsto, non dipende dalle coordinate angolari. Il primo stato eccitato ha momento angolare $l = 1$, lo spazio degenere corrispondente è generato sia dai vettori

$$|n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle, |n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle, |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1\rangle,$$

che dai vettori

$$|n = 1, l = 1, m = 1\rangle, |n = 1, l = 1, m = 0\rangle, |n = 1, l = 1, m = -1\rangle.$$

$$|n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}} x = A(r) \cos \phi \sin \theta$$

$$|n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}} y = A(r) \sin \phi \sin \theta$$

$$|n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}} z = A(r) \cos \theta$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} |n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle &= \frac{|n = 1, l = 1, m = 1\rangle + |n = 1, l = 1, m = -1\rangle}{\sqrt{2}} \\ |n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle &= \frac{|n = 1, l = 1, m = 1\rangle - |n = 1, l = 1, m = -1\rangle}{\sqrt{2}} \\ |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1\rangle &= |n = 1, l = 1, m = 0\rangle. \end{aligned}$$

Esercizio 6. L'Hamiltoniana per una particella di spin zero è data da

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2}{2I} + \lambda \frac{\hbar}{I_0} \mathbf{L}_z^2,$$

con λ parametro perturbativo. Determinare la correzione al prim'ordine dell'energia dello stato fondamentale e l'ordine zero degli autostati ad esso associati nel caso $l = 1$.

Sol: L'Hamiltoniana imperturbata è

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{L}^2 - \mathbf{L}_z^2}{2I},$$

quindi gli autostati imperturbati sono $|l, m\rangle$ con autovalori

$$\epsilon_{l,m} = \frac{\hbar^2}{2I} (l(l+1) - m^2).$$

Nel caso $l = 1$

$$\epsilon_m = \frac{\hbar^2}{2I} (2 - m^2),$$

lo stato fondamentale è doppiamente degenere per $m = \pm 1$

$$\epsilon_g = \frac{\hbar^2}{2I}.$$

Per determinare la correzione delle energie abbiamo che nel sottospazio degenere, corrispondente al proiettore $\mathbf{P} = |1, -1\rangle\langle 1, -1| + |1, 1\rangle\langle 1, 1|$, il potenziale perturbativo è

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{I_0} \mathbf{P} \mathbf{L}_x^2 \mathbf{P} &= \frac{\hbar}{4I_0} \mathbf{P} (\mathbf{L}_+^2 + \mathbf{L}_-^2 + \mathbf{L}_+ \mathbf{L}_- + \mathbf{L}_- \mathbf{L}_+) \mathbf{P} = \\ &= \frac{\hbar}{I_0} \mathbf{P} (\mathbf{L}_+^2 + \mathbf{L}_-^2 + 2\hbar \mathbf{L}_z + 2\mathbf{L}_- \mathbf{L}_+) \mathbf{P} = \\ &= \frac{2\hbar^2}{I_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Gli autovalori sono

$$\eta_{\pm} = \frac{\hbar^2}{I_0} (1 \pm \sqrt{5}),$$

con autostati

$$|\psi_{\pm}^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{5 \mp \sqrt{5}}} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} |1, -1\rangle + |1, 1\rangle \right),$$

questi ultimi sono l'ordine zero degli autostati perturbati, mentre al prim'ordine le energie sono

$$\epsilon_{\pm} = \frac{\hbar^2}{2I} + \lambda \eta_{\pm}.$$

Esercizio 7. Una particella di massa m è sottoposta ad un potenziale armonico isotropo tridimensionale

1. Scrivere autostati ed autovalori dell'Hamiltoniano.

2. Aggiungendo il termine perturbativo

$$\mathbf{V}(r) = \lambda \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad \lambda > 0$$

Determinare la correzione al primo ordine per l'energia dello stato fondamentale e del primo eccitato.

3. Stimare in base al calcolo precedente il valore di λ per il quale l'energia dello stato fondamentale uguaglia quella del primo eccitato e commentare il risultato ottenuto in termini della validità della teoria delle perturbazioni.

Sol: Gli autostati dell'energia nel caso imperturbato sono

$$\mathbf{H}_0 |n_x, n_y, n_z\rangle = \epsilon_m |n_x, n_y, n_z\rangle,$$

con $m = n_x + n_y + n_z$ e

$$\epsilon_m = \hbar\omega \left(m + \frac{3}{2} \right).$$

Lo stato fondamentale è $|0, 0, 0\rangle$ con energia $\epsilon_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$. Il primo livello eccitato è tre volte degenere con energia $\epsilon_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega$ e autospazio generato dai vettori $\{|1, 0, 0\rangle, |0, 1, 0\rangle, |0, 0, 1\rangle\}$. La correzione dello stato fondamentale è

$$E_0^{(1)} = \langle 0, 0, 0 | \mathbf{V} | 0, 0, 0 \rangle = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}} \delta(x) \delta(y) \delta(z) = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^3.$$

Per quanto riguarda il primo livello eccitato il potenziale ha tutti elementi di matrice nulli nel sottospazio degenere, per cui la correzione al prim'ordine è nulla. I livelli si incrociano al prim'ordine quando

$$\epsilon_0 + \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^3 = \epsilon_1,$$

ossia per

$$\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^3 = \hbar\omega.$$

La teoria al prim'ordine è quindi valida per

$$\lambda \ll \pi^{\frac{3}{2}} \ell^3 \hbar\omega.$$

Esercizio 8. Una particella in 1D è vincolata a muoversi nel segmento $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ ed è soggetta a un potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \lambda \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \sin \frac{\pi \mathbf{x}}{L}, \quad -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}.$$

Determinare lo stato fondamentale e la sua energia fino al primo ordine non nullo in λ .

Sol: Per il problema imperturbato lo stato fondamentale è

$$\langle x | \psi_1^0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi}{L} x,$$

con energia

$$E_1^0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Correzioni al prim'ordine

$$\begin{aligned} E_1^1 &= \lambda E_1^0 \langle \psi_1^0 | \sin \frac{\pi \mathbf{x}}{L} | \psi_1^0 \rangle = \\ &= \lambda \frac{2E_1^0}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos^2 \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} = \\ &= \lambda \frac{2E_1^0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds \cos^2 s \sin s = 0 \\ |\psi_1^1\rangle &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\langle \psi_m^0 | V(\mathbf{x}) | \psi_1^0 \rangle}{E_1^0 (1 - m^2)} |\psi_m^0\rangle, \end{aligned}$$

Per $j = 1, 2, \dots$

$$\langle \psi_{2j-1}^0 | V(\mathbf{x}) | \psi_1^0 \rangle = \lambda \frac{2E_1^0}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi (2j-1)x}{L} = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{2j}^0 | V(\mathbf{x}) | \psi_1^0 \rangle &= \lambda \frac{2E_1^0}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi jx}{L} = \\ &= \lambda \frac{2E_1^0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds \cos s \sin s \sin (2js) = \\ &= \lambda \frac{E_1^0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds \sin 2s \sin (2js) = \\ &= \lambda \frac{E_1^0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt \sin t \sin (jt) \end{aligned}$$

$$\cos t \cos (jt) + \sin t \sin (jt) = \cos ((j-1)t)$$

$$\cos t \cos (jt) - \sin t \sin (jt) = \cos ((j+1)t)$$

$$\sin t \sin (jt) = \frac{\cos ((j-1)t) - \cos ((j+1)t)}{2}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{2j}^0 | V(\mathbf{x}) | \psi_1^0 \rangle &= \lambda \frac{E_1^0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt (\cos ((j-1)t) - \cos ((j+1)t)) = \\ &= \frac{\lambda E_1^0}{2} \delta_{j,1} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} |\psi_1^1\rangle &= -\frac{\langle \psi_2^0 | V(\mathbf{x}) | \psi_1^0 \rangle}{3E_1^0} |\psi_2^0\rangle = -\frac{\lambda}{6} |\psi_2^0\rangle, \\ |\psi_1\rangle &\simeq \frac{6|\psi_1^0\rangle - \lambda |\psi_2^0\rangle}{\sqrt{36 + \lambda^2}}. \end{aligned}$$

Correzione al second'ordine

$$\begin{aligned} E_1^2 &= -\frac{\lambda^2 E_1^0}{6} \langle \psi_1^0 | \sin \frac{\pi \mathbf{x}}{L} | \psi_2^0 \rangle = \\ &= -\frac{\lambda^2 E_1^0}{L^3} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} = \\ &= -\frac{\lambda^2 E_1^0}{\pi^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds \cos s \sin s \sin 2s = \\ &= -\frac{\lambda^2 E_1^0}{\pi^6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds \sin^2 2s = -\frac{\lambda^2 E_1^0}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} dt \sin^2 t \end{aligned}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} dt \sin^2 t = \int_{-\pi}^{\pi} dt (1 - \cos^2 t) = 2\pi - I \implies I = \pi$$

$$E_1^2 = -\frac{\lambda^2 E_1^0}{12}$$

$$E_1 \simeq E_1^0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{12}\right).$$

Esercizio 9. Dato un oscillatore armonico in 2D descritto dall'Hamiltoniana

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2),$$

si aggiunga il termine perturbativo

$$\lambda \mathbf{V} = \lambda m\omega^2 \mathbf{x}\mathbf{y}, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Calcolare i primi due livelli energetici e i rispettivi autostati sia con la teoria delle perturbazioni al prim'ordine non nullo, sia esattamente. Confrontare i due risultati nel limite di $\lambda \rightarrow 0$.

Sol: L'Hamiltoniana imperturbata si separa nella somma di due Hamiltoniane di oscillatori armonici indipendenti nelle due direzioni

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0,x} + \mathbf{H}_{0,y}.$$

Un set completo di autostati è dato dal prodotto

$$|\psi_{n_x, n_y}\rangle = |n_x\rangle |n_y\rangle,$$

con energie

$$\epsilon_m = \hbar\omega (m+1), \quad m = n_x + n_y.$$

Ogni stato ha degenerazione pari a

$$d_m = m+1.$$

Lo stato fondamentale è

$$|n_x = 0, n_y = 0\rangle, \quad \epsilon_0 = \hbar\omega,$$

il primo livello eccitato ha energia

$$\epsilon_1 = 2\hbar\omega,$$

e l'autospazio è generato dagli stati $\{|n_x = 1, n_y = 0\rangle, |n_x = 0, n_y = 2\rangle\}$. Ricordiamo inoltre che

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \frac{\ell^2}{2} (\mathbf{a}_x \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y^\dagger + \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y^\dagger).$$

- **Teoria delle perturbazioni.** Per quanto riguarda lo stato fondamentale la correzione al prim'ordine all'energia è

$$\delta_0^{(1)} = m\omega^2 \langle 0, 0 | \mathbf{x}\mathbf{y} | 0, 0 \rangle = 0,$$

la correzione allo stato

$$|\psi_{0,0}^{(1)}\rangle = m\omega^2 \sum_{n_x, n_y \neq 0,0} \frac{\langle n_x, n_y | \mathbf{x}\mathbf{y} | 0, 0 \rangle}{\epsilon_0 - \epsilon_{n_x+n_y}} |0, 0\rangle = -\frac{1}{4} |1, 1\rangle.$$

La correzione al second'ordine dell'energia è

$$\delta_0^{(1)} = m\omega^2 \langle 0, 0 | \mathbf{x}\mathbf{y} | \psi_{0,0}^{(1)} \rangle = -m\omega^2 \frac{\ell^2}{8} = -\frac{\hbar\omega}{8},$$

ottenendo

$$|\bar{\psi}_0\rangle \propto \left(|00\rangle - \frac{\lambda}{4} |1, 1\rangle \right), \quad E_0 \simeq \hbar\omega \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} \right).$$

Per quanto riguarda il primo livello eccitato, il potenziale si rappresenta nel sottospazio come

$$m\omega^2 \mathbf{x}\mathbf{y} = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_1.$$

Dai suoi autovalori e autovettori si ottiene

$$|\bar{\psi}_{1,\pm}\rangle \simeq \frac{|0, 1\rangle \pm |1, 0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad E_{1,\pm} \simeq \hbar\omega \left(2 \pm \frac{\lambda}{2} \right).$$

- **Risultato esatto.** Conviene effettuare la trasformazione canonica

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{p}'_x = \frac{\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{p}'_y = \frac{\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y}{\sqrt{2}}.$$

Con questa trasformazione l'Hamiltoniana diventa la somma di due oscillatori armonici con frequenze diverse

$$\mathbf{H}' = \frac{(\mathbf{p}')^2_x + (\mathbf{p}')^2_y}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\mathbf{x}'^2 + \mathbf{y}'^2) + \lambda \frac{m\omega^2}{2} (\mathbf{x}'^2 - \mathbf{y}'^2) = \mathbf{H}_{x'}(\omega_+) + \mathbf{H}_{y'}(\omega_-),$$

$$\omega_{\pm} = \omega\sqrt{1 \pm \lambda}, \quad \ell_{\pm} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\pm}}}$$

Lo stato fondamentale ha energia

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} (\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1-\lambda}),$$

e autofunzione

$$\bar{\psi}_0(x', y') = \frac{e^{-\frac{x'^2}{2\ell_+^2}} e^{-\frac{y'^2}{2\ell_-^2}}}{\sqrt{\pi\ell_+\ell_-}}.$$

Per $\lambda \rightarrow 0$

$$\omega_{\pm} \sim \omega \left(1 \pm \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{8} \right),$$

$$E_0 \simeq \hbar\omega \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} \right).$$

$$\bar{\psi}_0 \simeq \frac{e^{-\frac{x'^2+y'^2}{2\ell^2}} e^{-\frac{m\omega\lambda}{\hbar} \frac{x'^2-y'^2}{4}}}{\ell\sqrt{\pi}} \simeq \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\ell^2}} e^{-\frac{m\omega\lambda}{\hbar} \frac{xy}{2}}}{\ell\sqrt{\pi}} \simeq \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\ell^2}}}{\ell\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{m\omega\lambda}{\hbar} \frac{xy}{2} \right) \propto \psi_0 - \frac{\lambda}{4} \psi_{1,1}.$$

Per quanto riguarda il primo livello eccitato

$$E_{1,1} = \frac{\hbar\omega}{2} (3\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1-\lambda}),$$

$$E_{1,2} = \frac{\hbar\omega}{2} (\sqrt{1+\lambda} + 3\sqrt{1-\lambda}),$$

$$\bar{\psi}_{1,1}(x', y') = \frac{e^{-\frac{x'^2}{2\ell_+^2}} e^{-\frac{y'^2}{2\ell_-^2}}}{\sqrt{2\pi\ell_+\ell_-}} 2 \frac{x'}{\ell_+},$$

$$\bar{\psi}_{1,2}(x', y') = \frac{e^{-\frac{x'^2}{2\ell_+^2}} e^{-\frac{y'^2}{2\ell_-^2}}}{\sqrt{2\pi\ell_+\ell_-}} 2 \frac{y'}{\ell_-}.$$

Per $\lambda \rightarrow 0$

$$E_{1,1} \simeq \hbar\omega \left(2 - \frac{\lambda}{2} \right), \quad E_{1,2} \simeq \hbar\omega \left(2 + \frac{\lambda}{2} \right),$$

$$\bar{\psi}_{1,1} \simeq \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\ell^2}}}{\ell^2\sqrt{2\pi}} 2(x+y) \propto \psi_{1,0} + \psi_{0,1},$$

$$\bar{\psi}_{1,2} \simeq \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\ell^2}}}{\ell^2\sqrt{2\pi}} 2(x-y) \propto \psi_{1,0} - \psi_{0,1}$$

Esercizio 10. Un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza ω è perturbato dal termine

$$V = -\lambda(\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{x})$$

con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ operatori coordinata ed impulso rispettivamente.

1. Quali sono le dimensioni di λ ?
2. Qual è il regime di validità della teoria delle perturbazioni?

3. Calcolare la prima correzione non nulla dei livelli imperturbati.
4. Confrontando con la soluzione esatta determinare il regime di validità della teoria delle perturbazioni dalla condizione

$$\frac{E_n(\lambda) - E_n^{(1)}(\lambda)}{\hbar\omega} < 0.1$$

dove $E_n(\lambda)$ è l'autovalore esatto dell'energia e $E_n^{(1)}(\lambda)$ è l'autovalore all'ordine 1 in λ .

Suggerimento: per la soluzione esatta trovare la trasformazione canonica che riduce l'Hamiltoniano in presenza di V ad un Hamiltoniano armonico. Se si vuole si può esprimere anche $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ in termini degli operatori di creazione e distruzione

Sol:

1. $[V] = [\lambda\hbar] \Rightarrow [\lambda] = [t^{-1}]$.
2. Validità $\Delta E_n \ll \Delta\epsilon_n$
3. Livelli imperturbati

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), |n\rangle.$$

Il potenziale si esprime in termini di operatori di creazione edistruzione come

$$\mathbf{V} = -i\hbar\lambda (\mathbf{a}^{\dagger 2} - \mathbf{a}^2).$$

Segue che la prima correzione delle energie è nulla

$$E_n^{(1)} = \langle n | \mathbf{V} | n \rangle = 0.$$

La correzione all'autostato è

$$\begin{aligned} |\psi_n^{(1)}\rangle &= \sum_{k \neq n} \frac{\langle k | \mathbf{V} | n \rangle}{\epsilon_n - \epsilon_k} |k\rangle = \\ &= \frac{\langle n+2 | \mathbf{V} | n \rangle}{\epsilon_n - \epsilon_{n+2}} |n+2\rangle + \frac{\langle n-2 | \mathbf{V} | n \rangle}{\epsilon_n - \epsilon_{n-2}} |n-2\rangle = \\ &= -i \frac{\lambda}{2\omega} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2\rangle - \sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle \right). \end{aligned}$$

La correzione al second'ordine dell'energia è

$$\begin{aligned} \Delta E_n^{(1)} &= \langle n | \mathbf{V} | \psi_n^{(1)} \rangle = -\frac{\lambda^2 \hbar}{2\omega} (-n(n-1) + (n+1)(n+2)) = \\ &= -\frac{\lambda^2 \hbar}{\omega} (2n+1). \end{aligned}$$

Quindi la teoria è valida per i livelli più bassi, per cui

$$E_n^{(1)} \ll \hbar\omega,$$

ossia per

$$\lambda \ll \frac{\omega}{\sqrt{2n+1}}.$$

4. Possiamo riscrivere l'Hamiltoniana come

$$\mathbf{H} = (\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}) \mathbf{h} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{h} = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} & -i\lambda \\ +i\lambda & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix} = \hbar \left(\frac{\omega}{2} \sigma_0 + \lambda \sigma_2 \right).$$

La forma quadratica può essere diagonalizzata con la trasformazione canonica che agisce come un cambiamento di base

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\dagger \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}) \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}^{\dagger -1} \mathbf{h} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix},$$

e tale da mantenere le regole di commutazione

$$(\mathbf{b}^\dagger, \mathbf{b}) \sigma_3 \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\dagger \end{pmatrix} = (\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}) \mathbf{T}^\dagger \sigma_3 \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} = -\mathbf{I}.$$

Deve quindi valere

$$\mathbf{T}^\dagger \sigma_3 \mathbf{T} = \sigma_3, \implies \mathbf{T}^{\dagger-1} = \sigma_3 \mathbf{T} \sigma_3,$$

che, inserita nell'Hamiltoniana dà

$$\mathbf{H} = (\mathbf{b}^\dagger, \mathbf{b}) \sigma_3 \mathbf{T} \sigma_3 \mathbf{h} \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\dagger \end{pmatrix}.$$

Possiamo allora scegliere la trasformazione $\mathbf{T}$ che diagonalizza l'operatore (non più hermitiano)

$$\sigma_3 \mathbf{h} = \hbar \left(\frac{\omega}{2} \sigma_3 - i\lambda \sigma_1 \right).$$

Gli autovalori di questa nuova matrice sono

$$\eta_{\pm} = \pm \hbar \frac{\omega}{2} \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{\omega^2}},$$

quindi l'Hamiltoniana nella nuova base è

$$\mathbf{H} = \hbar \frac{\omega}{2} \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{\omega^2}} (2\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{I}),$$

l'energia dello stato fondamentale è

$$E_0 = \hbar \frac{\omega}{2} \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{\omega^2}} \simeq \hbar \frac{\omega}{2} - \frac{\hbar \lambda^2}{\omega}.$$

In generale

$$\frac{E_n(\lambda) - E_n^{(1)}(\lambda)}{\hbar \omega} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{\omega^2}} - 1 + \frac{2\lambda^2}{\omega^2} \right) (2n + 1).$$

Condizione di validità

$$\left| \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{\omega^2}} - 1 + \frac{2\lambda^2}{\omega^2} \right| < \frac{0.2}{2n + 1}.$$

Sviluppando la radice

$$\frac{8\lambda^4}{\omega^4} < \frac{0.2}{2n + 1}$$