

Esercitazione 12

10 gennaio 2025

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Un contenitore cilindrico di altezza L e sezione σ è occupato da un gas perfetto monoatomico mantenuto a temperatura costante T .

1. Determinare il calore specifico a volume costante del gas in assenza ed in presenza di una accelerazione di gravità costante g diretta verso il basso lungo l'altezza L del contenitore.
2. Discutere i limiti dell'espressione trovata per $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$.

Sol: L'Hamiltoniana del gas senza accelerazione è

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m}.$$

Nel canonico la funzione di partizione è

$$Z = \frac{V^N}{N!} z_0^{3N} = \frac{\sigma^N L^N}{N!} z_0^{3N},$$

con

$$z_0 = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Energia libera

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \ln Z = \frac{1}{\beta} \left(\ln N! + N \ln \frac{\lambda^3}{V} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{N}{\beta} \left(\ln \frac{N\lambda^3}{V} - 1 \right). \end{aligned}$$

Energia interna

$$\begin{aligned} U &= \langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln N! + N \ln \frac{\lambda^3}{V} \right) = \\ &= N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{\lambda^3}{V} = \frac{N}{\lambda^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \lambda^3 = 3 \frac{N}{\lambda} \frac{h}{\sqrt{2m\pi}} \frac{1}{2\sqrt{\beta}} = \\ &= \frac{3}{2} N k_B T. \end{aligned}$$

Calore specifico a volume costante

$$c_V = \frac{3}{2} k_B.$$

L'Hamiltoniana del gas con accelerazione è

$$H = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} + mgz_j \right).$$

Funzione di partizione

$$Z = \frac{\sigma^N}{N! \lambda^3} z_1^N,$$

con

$$z_1 = \int_0^L dz e^{-\beta mgz} = \frac{1 - e^{-\beta mgL}}{\beta mg}.$$

Energia libera

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \ln Z = \frac{1}{\beta} \left(\ln N! + N \ln \frac{\lambda^3}{\sigma z_1} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{N}{\beta} \left(\ln \frac{N\lambda^3}{\sigma z_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Energia interna

$$\begin{aligned}
 U &= \langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln N! + N \ln \frac{\lambda^3}{\sigma z_1} \right) = \\
 &= N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{\lambda^3}{\sigma z_1} = \frac{N \sigma z_1}{\lambda^3} \left[3 \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \lambda - \frac{\lambda^3}{\sigma z_1^2} \frac{\partial}{\partial \beta} z_1 \right] = \\
 &= \frac{N}{\lambda} \left[3 \frac{\lambda}{2\beta} - \frac{\lambda}{z_1 \beta} (-z_1 + L e^{-mgL\beta}) \right] = \\
 &= \frac{N}{\beta} \left[\frac{5}{2} - \frac{L}{z_1} e^{-mgL\beta} \right] \\
 &= N \left[\frac{5}{2\beta} + \frac{mgL}{1 - e^{\beta mgL}} \right] = N \left[\frac{5k_B T}{2} + \frac{mgL}{1 - e^{\frac{mgL}{k_B T}}} \right].
 \end{aligned}$$

Calore specifico

$$c_V = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial T} U = \frac{5}{2} k_B - k_B \frac{(mgL)^2 e^{\frac{mgL}{k_B T}}}{k_B^2 T^2 \left(1 - e^{\frac{mgL}{k_B T}} \right)^2}$$

Per $T \rightarrow \infty$

$$U \simeq \frac{3}{2} N k_B T$$

$$c_V = \frac{3}{2} k_B.$$

Per $T \rightarrow 0$

$$U \simeq N \left[\frac{5k_B T}{2} - mgL e^{-\frac{mgL}{k_B T}} \right] \simeq \frac{5}{2} N k_B T,$$

$$c_V = \frac{5}{2} k_B - k_B \frac{(mgL)^2}{k_B^2 T^2} e^{-\frac{mgL}{k_B T}}.$$

Esercizio 2. Un gas classico di particelle di massa m è equilibrato a temperatura T . Si calcoli

1. $\langle \vec{v} \cdot \hat{n} \rangle$ dove $\hat{n}$ è un versore generico.
2. $\langle (\vec{v} \cdot \hat{n}) (\vec{v} \cdot \hat{m}) \rangle$ dove $\hat{m}$ è un versore che indica una direzione formante un angolo θ con la direzione individuata da $\hat{n}$.
3. Le fluttuazioni relative del valore quadratico medio

$$\Sigma = \frac{\langle (\vec{v} \cdot \hat{n})^4 \rangle - \langle (\vec{v} \cdot \hat{n})^2 \rangle^2}{\langle (\vec{v} \cdot \hat{n})^2 \rangle^2}$$

Sol: Ricordando la distribuzione di Maxwell-Boltzmann

1. $\langle \vec{v} \cdot \hat{n} \rangle = 0$.
2. Scegliendo un sistema di riferimento in cui $\hat{n} = \hat{z}$ e $\hat{m} = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{x}$ si ha

$$\begin{aligned}
 \langle (\vec{v} \cdot \hat{n}) (\vec{v} \cdot \hat{m}) \rangle &= \langle v_z (v_z \cos \theta + v_x \sin \theta) \rangle = \\
 &= \cos \theta \langle v_z^2 \rangle + \sin \theta \langle v_z v_x \rangle = \\
 &= \cos \theta \langle v_z^2 \rangle = \cos \theta \frac{k_B T}{m}.
 \end{aligned}$$

In particolare

$$\langle (\vec{v} \cdot \hat{n})^2 \rangle = \sigma^2 = \frac{k_B T}{m}.$$

3. Possiamo calcolare $\langle v_n^2 \rangle = \langle (\vec{v} \cdot \hat{n})^4 \rangle$ come integrale gaussiano

$$\langle (\vec{v} \cdot \hat{n})^4 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_n}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v_n^2}{2\sigma^2}} v_n^4 = 3\sigma^4.$$

Quindi

$$\Sigma = \frac{3\sigma^4 - \sigma^4}{\sigma^4} = 2.$$

Alternativamente possiamo considerare l'Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^2}{2m} \Rightarrow \langle H \rangle = \frac{3m}{2} \langle v_n^2 \rangle, \\ H^2 &= \frac{p_x^4 + p_y^4 + p_z^4 + 2p_x^2 p_y^2 + 2p_x^2 p_z^2 + 2p_y^2 p_z^2}{4m^2} \Rightarrow \langle H^2 \rangle = \frac{3m^2}{4} \langle v_n^4 \rangle + \frac{3m^2}{2} \langle v_n^2 \rangle^2, \\ \frac{\Delta H^2}{\langle H \rangle^2} &= \frac{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}{\langle H \rangle^2} = \frac{\langle v_n^4 \rangle - \langle v_n^2 \rangle^2}{3 \langle v_n^2 \rangle^2} = \frac{\Sigma}{3}. \end{aligned}$$

Nel canonico

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{3}{2} \frac{1}{\beta}, \\ \Delta H^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \langle H \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{\beta^2}, \\ \Sigma &= -3 \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} \langle H \rangle}{\langle H \rangle^2} = 3 \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{\beta^2}}{\frac{9}{4} \frac{1}{\beta^2}} = 2. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Si determini, in funzione della temperatura, l'energia interna per particella di un gas di Fermi di spin $\frac{1}{2}$ con potenziale chimico nullo a temperatura T racchiuso in un volume V . Può essere utile conoscere il risultato (numericamente approssimato) dei seguenti integrali

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x + 1} &= 0.678, \\ \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x + 1} &= 1.153. \end{aligned}$$

Sol: Energia interna

$$U = V \int_0^\infty d\epsilon \epsilon n(\epsilon) D(\epsilon) = 2V\alpha_3 \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{e^{\beta\epsilon} + 1}$$

con $\alpha_3 = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi^2}\hbar^3}$. Con la sostituzione

$$\beta\epsilon = x,$$

si ottiene

$$U = 2V\alpha_3\beta^{-\frac{5}{2}} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x + 1} = 2V\alpha_3\beta^{-\frac{5}{2}} \cdot 1.153.$$

Numero di particelle

$$\begin{aligned} N &= V \int_0^\infty d\epsilon n(\epsilon) D(\epsilon) = 2V\alpha_3 \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta\epsilon} + 1} = 2V\alpha_3\beta^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x + 1} = 2V\alpha_3\beta^{-\frac{3}{2}} \cdot 0.678. \\ U &= Nk_B T \frac{1.153}{0.678}. \end{aligned}$$

Compiti per casa

Esercizio 4. Due gas perfetti classici monoatomici sono costituiti da particelle di massa m_1 ed m_2 in numero rispettivamente N_1 ed N_2 . Essi si trovano all'equilibrio termodinamico racchiusi in un volume V . Determinare le pressioni parziali e il rapporto fra le densità dei due gas.

Sol: All'equilibrio termodinamico nel grancanonico $T_1 = T_2 = T$ e $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

$$Z_{gc} = Z_{gc}^{(1)} Z_{gc}^{(2)},$$

$$Z_{gc}^{(j)} = \exp\left(\frac{V\zeta}{\lambda_j^3}\right).$$

Pressioni:

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \Rightarrow pV = p_1V + p_2V \Rightarrow p = p_1 + p_2,$$

$$p_j = k_B T \frac{\langle N_j \rangle}{V} = k_B T \frac{\zeta}{\lambda_j^3},$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Il rapporto fra le densità è

$$\frac{\langle N_1 \rangle}{\langle N_2 \rangle} = \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Esercizio 5. N sistemi quantistici indipendenti e distinguibili possono essere schematizzati come sistemi a due livelli non-degeneri nei quali l'energia dello stato fondamentale è E_0 e la differenza di energia fra lo stato fondamentale e lo stato eccitato è Δ . Essi sono all'equilibrio termico a temperatura T . Calcolare in funzione della temperatura:

1. Le popolazioni dei due livelli.
2. L'energia interna del sistema.
3. L'entropia del sistema. Valutare esplicitamente i casi limite $k_B T \ll \Delta$ e $k_B T \gg \Delta$.

Sol:

1. Per il singolo sistema a due livelli si ha

$$z = e^{-\beta E_0} (1 + e^{-\beta \Delta}), \Rightarrow Z = z^N$$

per cui

$$p_0 = \frac{1}{1 + e^{-\beta \Delta}}, p_1 = \frac{e^{-\beta \Delta}}{1 + e^{-\beta \Delta}},$$

$$\langle n_0 \rangle = N p_0 = \frac{N}{1 + e^{-\beta \Delta}}, \langle n_1 \rangle = N p_1 = \frac{N e^{-\beta \Delta}}{1 + e^{-\beta \Delta}}.$$

2. L'energia interna è

$$U = N (p_0 E_0 + p_1 E_1) = N \frac{E_0 + E_1 e^{-\beta \Delta}}{1 + e^{-\beta \Delta}}.$$

3. Energia libera

$$Z = -\frac{N}{\beta} \ln z = N k_B \left(\frac{E_0}{k_B} - T \ln \left(1 + e^{-\frac{\Delta}{k_B T}} \right) \right),$$

entropia

$$S = -\frac{\partial}{\partial T} Z = N k_B \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{\Delta}{k_B T}} \right) + \frac{e^{-\frac{\Delta}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{\Delta}{k_B T}}} \frac{\Delta}{k_B T} \right]$$

Per $k_B T \ll \Delta$

$$S \sim N \frac{\Delta}{T} e^{-\frac{\Delta}{k_B T}} \rightarrow 0.$$

Per $k_B T \gg \Delta$

$$S \sim N k_B \ln 2.$$

Esercizio 6. Un insieme di N sistemi quantistici distinguibili ognuno dei quali avente solo due livelli di energia, la cui differenza è $E_2 - E_1 = \Delta$, è termalizzato a temperatura T .

- Supponendo che la degenerazione dei due stati sia uguale, determinare il rapporto fra le popolazioni dello stato eccitato n_2 e dello stato fondamentale n_1 .
- Se invece la degenerazione dei due stati non è la stessa, come cambia il rapporto fra le popolazioni?

Sol: Nel primo caso, per ogni particella si ha

$$n_1 = g \frac{e^{-\beta E_1}}{Z}, \quad n_2 = g \frac{e^{-\beta E_2}}{Z},$$

dove g è la degenerazione. Il rapporto è quindi

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\beta \Delta}.$$

Nel secondo caso

$$n_1 = g_1 \frac{e^{-\beta E_1}}{Z}, \quad n_2 = g_2 \frac{e^{-\beta E_2}}{Z},$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\beta \Delta}.$$

Esercizio 7. A quale temperatura un gas perfetto classico di N particelle monoatomiche ha la stessa energia interna di un gas di N fermioni di spin $1/2$ a temperatura $T = 0$ in un cubo di volume V ?

Sol: Le energie del sistema sono

$$\epsilon_n = \epsilon_0 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

con

$$\epsilon_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mV^{\frac{3}{2}}}.$$

Il numero di particelle in termini della densità degli stati è

$$N = 2V \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon D(\epsilon) = 2V \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \alpha_3 \epsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{4V\alpha_3}{3} \epsilon_F^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \epsilon_F = \left(\frac{3N}{4V\alpha_3} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$\alpha_3 = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3}$$

$$U = 2V \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon D(\epsilon) \epsilon = \frac{4V\alpha_3}{5} \epsilon_F^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} N \epsilon_F = \frac{3}{2} N k_B T.$$

$$T = \frac{2\epsilon_F}{5k_B}$$

Esercizio 8. In un gas di Fermi a temperatura nulla determinare l'energia media per particella e l'entropia in funzione dell'energia di Fermi. Si consideri il sistema tridimensionale.

Sol: In tre dimensioni

$$D(\epsilon) = cV\sqrt{\epsilon},$$

$$U = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon D(\epsilon) = \frac{2cV}{5} \epsilon_F^{\frac{5}{2}},$$

$$N = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon D(\epsilon) = \frac{2cV}{3} \epsilon_F^{\frac{3}{2}},$$

$$u = \frac{U}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_F.$$

A temperatura nulla $S = 0$.