

Esercitazione 8

21 novembre 2025

Esercizio 1.22. La componente $\mathbf{L}_z$ del momento angolare orbitale è compatibile con $\mathbf{x}$ e con $\mathbf{r}^2$?

Sol: Dal momento che $\mathbf{L}_z = \mathbf{y}\mathbf{p}_z - \mathbf{z}\mathbf{p}_y$ ovviamente $[\mathbf{L}_z, \mathbf{x}] = 0$. Inoltre

$$[\mathbf{L}_z, \mathbf{y}^2] = \mathbf{y} [\mathbf{L}_z, \mathbf{y}] + [\mathbf{L}_z, \mathbf{y}] \mathbf{y} = i2\hbar\mathbf{z}\mathbf{y},$$

$$[\mathbf{L}_z, \mathbf{z}^2] = -i2\hbar\mathbf{z}\mathbf{y},$$

quindi

$$[\mathbf{L}_z, \mathbf{r}^2] = [\mathbf{L}_z, \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2] = 0.$$

Note. It is known that the eigenvalues of a component of the angular momentum are $m\hbar$ and those of $\vec{L}^2$ are $l(l+1)\hbar^2$ with m, l integers: it is customary to refer to them simply as m and l : for example, if $l = 2$ we shall say that $\vec{L}^2$ has the eigenvalue 2, not $6\hbar^2 = 2(2+1)\hbar^2$. In addition, the eigenvalues of a component different from L_z , e.g. L_x , will be denoted by a subscript to the letter m , e.g. m_x .

8.1 Consider a particle in three dimensions.

- a) By exploiting the Schrödinger Representation for the angular momentum $\vec{L} \xrightarrow{\text{SR}} -i\hbar \vec{r} \wedge \nabla$, explicitly show that the states whose wavefunctions depend only on r , $|s\rangle \xrightarrow{\text{SR}} f(r)$, are eigenstates of all the components of $\vec{L}$. What is the value of $\vec{L}^2$ in such states?
- b) Use the commutation rules $[L_i, q_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} q_k$ to show that each state $|\mathcal{P}_i\rangle = q_i |s\rangle$ whose wavefunction is $x_i f(r)$, $i = 1, 2, 3$, is an eigenstate of the component of the angular momentum carrying the same index.
- c) Calculate $\sum_i [L_i, [L_i, q_j]]$ and use the result to show that the states represented by the wavefunctions $x_j f(r)$, and their linear combinations, all are eigenstates of $\vec{L}^2$.
- d) Write the commutation rules between L_z and $q_1 \pm i q_2$ and show that the states $|\mathcal{P}_\pm\rangle \xrightarrow{\text{SR}} (x \pm i y) f(r)$, $|\mathcal{P}_0\rangle \xrightarrow{\text{SR}} z f(r)$ are eigenstates of L_z . Which are the eigenvalues of L_x, L_y, L_z in the linear span of the vectors $|\mathcal{P}_i\rangle$?
- e) Say whether the states with wavefunctions $\psi_1(x, y, z) = x f(r)$, $\psi_2(x, y, z) = y f(r)$, $\psi_3(x, y, z) = z f(r)$, are mutually orthogonal and equally normalized. Find the condition $f(r)$ must fulfill so that they are normalized to 1. Are the states represented by the wavefunctions $\psi_\pm(x, y, z) = (x \pm i y) f(r)$, $\psi_0(x, y, z) = z f(r)$, equally normalized?

f) Write equally normalized wavefunctions for the eigenstates of L_x and of L_y belonging to the linear span of the vectors $|\mathcal{P}_i\rangle$.

8.2 Assume that the states $|\mathcal{P}_i\rangle \xrightarrow{\text{SR}} x_i f(r)$, $i = 1, 2, 3$ (see Problem 8.1) are normalized.

- a) Find the matrices that represent L_x, L_y, L_z in states with $l = 1$ in the basis $|\mathcal{P}_i\rangle$ (*Cartesian basis*): to this purpose use the commutation rules among the components of $\vec{L}$ and those of $\vec{q}$ to calculate the matrix elements of L_x, L_y, L_z . Does the representation of $\vec{L}$ depend on the radial function $f(r)$?
- b) Still restricting to states with $l = 1$, find the representation of L_x, L_y, L_z in the basis consisting of the eigenvectors of L_z (*spherical basis*):

$$|m = \pm 1\rangle \equiv e^{i\alpha_{\pm}} |\mathcal{P}_{\pm}\rangle \xrightarrow{\text{SR}} e^{i\alpha_{\pm}} \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} f(r),$$

$$|m = 0\rangle \equiv |\mathcal{P}_0\rangle \xrightarrow{\text{SR}} z f(r)$$

where $e^{i\alpha_{\pm}}$ are arbitrary phase factors.

Let $|l, m\rangle$ be a simultaneous eigenvector of $\vec{L}^2$ belonging to the eigenvalue $l(l+1)\hbar^2$ and of L_z belonging to the eigenvalue $m\hbar$ and let $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$.

- c) It is known that $L_{\pm}|l, m\rangle \propto |l, m \pm 1\rangle$: calculate the absolute value of the proportionality coefficient in such a way that, if $|l, m\rangle$ is normalized, also the vectors $|l, m \pm 1\rangle$ are normalized. Choose the phases of the vectors $|l, m\rangle$ so that, in this basis, L_x is represented by a matrix whose elements are real and positive. Given this choice of the phases, find the representation of L_x, L_y, L_z in the states with $l = 1$.
- d) Does a 3×3 matrix exist that both commutes with all the matrices found in either a) or in b), and that is not a multiple of the identity? Does a 3×3 matrix exist that commutes with only two of them?

Esercizio 1.4. Calcolare il valor medio, su di un autostato di $\mathbf{L}_z$ e $\mathbf{L}^2$, della componente del momento angolare lungo una direzione $\vec{n}$ che forma un angolo θ rispetto alla direzione z .

Sol: Il versore ha coordinate

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned}\langle l, m | \mathbf{L}_z | l, m \rangle &= \hbar m, \\ \langle l, m | \mathbf{L}_x | l, m \rangle &= \langle l, m | \mathbf{L}_y | l, m \rangle = 0,\end{aligned}$$

e quindi

$$\langle l, m | \vec{n} \cdot \vec{\mathbf{L}} | l, m \rangle = \hbar m \cos \theta$$

Esercizio 1.5. Calcolare autovalori e autovettori di $\mathbf{L}_x$ e $\mathbf{L}_y$ nel caso in cui $l = 1$.

Sol: Per simmetria rispetto alla scelta di orientazione degli assi, gli autovalori sono gli stessi di $\mathbf{L}_z$ ossia $m = 0, \pm \hbar$. Gli autostati hanno la forma

$$|\psi\rangle = a_1 |1, 1\rangle + a_0 |1, 0\rangle + a_{-1} |1, -1\rangle$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_x &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_y &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_z &= \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Gli autovettori di $\mathbf{L}_x$ sono quindi

$$|1, 1\rangle_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

mentre gli autovettori di $\mathbf{L}_y$ sono

$$|1, 1\rangle_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

e gli autovettori di $\mathbf{L}_y$ sono

$$|1, 1\rangle_y = \frac{|1, 1\rangle \mp i\sqrt{2}|1, 0\rangle - |1, -1\rangle}{2}, \quad |1, 0\rangle_y = \frac{|1, 1\rangle + |1, -1\rangle}{\sqrt{2}},$$

lo stato iniziale si può scrivere come

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|1, 1\rangle - |1, -1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

La sua evoluzione è data da

$$|\psi(t)\rangle = e^{-ict} \frac{|1, 1\rangle - e^{i2ct}|1, -1\rangle}{\sqrt{2}},$$

quindi

$$|\psi(t)\rangle = |1, 0\rangle_y,$$

per $t^* = \frac{\pi}{2c}$.

Esercizio 1.15. L'Hamiltoniana di un sistema quantistico è

$$\mathbf{H} = c\mathbf{L}_z.$$

Supponendo che il sistema sia in un autostato di $\mathbf{L}^2$ e di $\mathbf{L}_x$ con autovalori $2\hbar^2$ e zero, dopo quanto tempo il sistema si troverà in un autostato di $\mathbf{L}_y$ con autovalore zero?

Sol: Lo stato iniziale è

$$|\psi(0)\rangle = |1, 0\rangle_x.$$

Durante l'evoluzione il sistema rimane in un autostato di $\mathbf{L}^2$ con $l = 1$. Sapendo che gli autovettori di $\mathbf{L}_x$ sono, nella base degli autostati di $\mathbf{L}_z$

$$|1, \pm 1\rangle_x = \frac{|1, 1\rangle \pm \sqrt{2}|1, 0\rangle + |1, -1\rangle}{2}, \quad |1, 0\rangle_x = \frac{|1, 1\rangle - |1, -1\rangle}{\sqrt{2}},$$

- Segue....

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

$$E_1 = -\frac{e^4 \mu}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \simeq -13.6 \text{ eV}$$

$$|\psi_{n,l,m,\sigma}\rangle = |R_{l,n}\rangle |l,m\rangle |\sigma\rangle,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$l = 0, \dots, n-1.$$

Raggio di Bohr modificato

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2},$$

$$\rho = \frac{2r}{na_B}$$

La parte radiale della funzione d'onda è

$$R_{l,n}(r) = N_{n,l} \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho),$$

dove $L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$ sono i **polinomi associati di Laguerre** che sono soluzioni dell'equazione

$$\rho f''(\rho) + (2l+2-\rho) f'(\rho) + (n-l-1) f(\rho) = 0,$$

e la normalizzazione è

$$N_{n,l} = a_B^{-\frac{3}{2}} \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}}$$

Vettore di Lenz

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2ze^2\mu} (\vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{p}}) - \frac{1}{r} \vec{\mathbf{r}}.$$

7.1.2 Oscillatore armonico 3D isotropico in coordinate sferiche

In coordinate sferiche l'Hamiltoniana si scrive

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{m\omega^2}{2} r^2 + \frac{1}{r^2 2m} L^2(\theta, \phi) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi),$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{r^2}{\ell^4} + \frac{1}{r^2 \hbar^2} L^2(\theta, \phi) \right] \psi(r, \theta, \phi) = \frac{\hbar^2}{2m} \epsilon \psi(r, \theta, \phi).$$

La soluzione è il prodotto di un'armonica sferica e di una funzione radiale

$$\psi(r, \theta, \phi) = R_{k,l}(r) Y_l^m(\theta, \phi).$$

L'equazione per la parte radiale, fissato l , è

$$\left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{r^2}{\ell^4} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{k,l}(r) = \epsilon_{k,l} R_{k,l}(r),$$

e, introducendo la nuova funzione

$$u_{k,l}(r) = r R_{k,l}(r),$$

diventa

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{r^2}{\ell^4} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_{k,l}(r) = \epsilon_{k,l} u_{k,l}(r),$$

con $u(0) = u(\infty) = 0$

$$u'' - \left(\frac{r^2}{\ell^4} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \epsilon \right) u = 0.$$

Il comportamento asintotico per $r \rightarrow \infty$ è

$$u'' - \frac{r^2}{\ell^4} u \simeq 0 \Rightarrow u \sim e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}}$$

per cui cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(r) = y(r) e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}},$$

con $y(0) = 0$. Derivando

$$\begin{aligned} u' &= \left(y' - \frac{r}{\ell^2} y \right) e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}}, \\ u'' &= \left(y'' - 2\frac{r}{\ell^2} y' - \frac{1}{\ell^2} y + \frac{r^2}{\ell^4} y \right) e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}}, \end{aligned}$$

si ottiene l'equazione per la y

$$y'' - 2\frac{r}{\ell^2} y' + \left(\epsilon - \frac{1}{\ell^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y = 0.$$

Sviluppiamo la soluzione in serie di potenze

$$y = r^s \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j$$

con $a_0 \neq 0$ (ovviamente tutti i coefficienti a_j sono funzioni di l)

$$y' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (s+j) r^{s+j-1},$$

$$y'' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (s+j)(s+j-1) r^{s+j-2},$$

e si ottiene la condizione

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left((s+j)(s+j-1) r^{s+j-2} - 2(s+j) \frac{r^{s+j}}{\ell^2} + \left(\epsilon - \frac{1}{\ell^2} \right) r^{s+j} - l(l+1) r^{s+j-2} \right) = 0,$$

che deve essere verificata ad ogni ordine in r .

- Ordine più basso r^{s-2}

$$a_0 [s(s-1) - l(l+1)] = 0 \Rightarrow s = l+1.$$

- Prim'ordine r^{s-1}

$$a_1 [(s+1)s - l(l+1)] = a_1 2(l+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$

- Second'ordine r^s

$$\begin{aligned} a_2 [(s+2)(s+1) - l(l+1)] - a_0 \left[\frac{2s}{\ell^2} - \left(\epsilon - \frac{1}{\ell^2} \right) \right] &= a_2 [(l+3)(l+2) - l(l+1)] - a_0 \left[\frac{2l+3-\epsilon\ell^2}{\ell^2} \right] = \\ &= a_2 [4l+6] - a_0 \left[\frac{2l+3-\epsilon\ell^2}{\ell^2} \right] \end{aligned}$$

- Terzo ordine $s+1$

$$a_3 = 0$$

Andando avanti in questo modo si scopre che tutti i coefficienti dispari $a_{2q+1} = 0$ sono nulli. Per quelli pari si ha la formula di ricorrenza

$$2(q+1)(2(q+1)+3)a_{2(q+1)} = \frac{4q+2l+3-\epsilon\ell^2}{\ell^2} a_{2q}$$

Per $q \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{2(q+1)}}{a_{2q}} \rightarrow \frac{4q-\epsilon\ell^2}{4q^2\ell^2},$$

per ϵ generico la serie divergerebbe all'infinito come $e^{\frac{r^2}{\ell^2}}$ e questa possibilità la scartiamo. Questo significa che da un certo $q = k$ tutti i coefficienti devono annullarsi e la serie terminare. La condizione è

$$\epsilon_{k,l} = \frac{4k+2l+3}{\ell^2}.$$

Quindi le energie si possono esprimere come

$$E_{k,l} = \hbar\omega \left(2k + l + \frac{3}{2} \right),$$

e

$$R_{k,l}(r) = e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}} \sum_{j=0}^k a_{2j}^{(l)} r^{l+2j}.$$

Confrontando con le energie ricavate a partire dagli autostati dell'oscillatore armonico unidimensionale si ha

$$2k + l = n$$

7.1.3 Esercizi

Esercizio 7.1. Oscillatore armonico tridimensionale. Calcolare le energie e gli autostati dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{r}^2.$$

Descrivere lo stato fondamentale e il primo eccitato in termini di autostati del momento angolare e nella loro rappresentazione in termini di (n_x, n_y, n_z) .

Sol: Possiamo scomporre l'Hamiltoniana in tre oscillatori armonici lungo le tre direzioni

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_y + \mathbf{H}_z,$$

$$\mathbf{H}_j = \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{q}_j^2,$$

e quindi definire la base

$$|n_x, n_y, n_z\rangle = |n_x\rangle |n_y\rangle |n_z\rangle.$$

Poiché l'Hamiltoniana è separabile, i vettori di tale base sono anche autostati dell'energia

$$\mathbf{H} |n_x, n_y, n_z\rangle = E_{n_x, n_y, n_z} |n_x, n_y, n_z\rangle,$$

con

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right).$$

Ovviamente, tutti gli stati con $n_x + n_y + n_z = n$ sono degeneri con degenerazione $d = \binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Possiamo scrivere

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{n} + \frac{3}{2} \right),$$

con $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_y + \mathbf{n}_z$. Notiamo che abbiamo a che fare con un potenziale centrale e l'equazione di Schroedinger si può scrivere in coordinate sferiche come

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{m\omega^2}{2} r^2 + \frac{1}{r^2 2m} L^2(\theta, \phi) \right] \psi = E\psi,$$

per cui la funzione d'onda si può separare in una parte radiale ed una angolare

$$\psi = R_l(r) Y_l^m(\theta, \phi).$$

Come per tutti i potenziali centrali, $[\mathbf{H}, \mathbf{L}^2] = [\mathbf{H}, \mathbf{L}_z] = 0$ e quindi anche $[\mathbf{n}, \mathbf{L}^2] = [\mathbf{n}, \mathbf{L}_z] = 0$. Possiamo quindi scegliere una nuova base di autostati simultanei di $\mathbf{n}, \mathbf{L}^2, \mathbf{L}_z$

$$|n, l, m\rangle.$$

In questo caso il momento angolare è conservato, per cui lo stato fondamentale è

$$|n = 0, l = 0, m = 0\rangle = |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0\rangle.$$

La funzione d'onda corrispondente è

$$\langle x, y, z | n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\ell^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}},$$

e, come previsto, non dipende dalle coordinate angolari. Il primo stato eccitato ha momento angolare $l = 1$, lo spazio degenere corrispondente è generato sia dai vettori

$$|n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle, |n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle, |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1\rangle,$$

che dai vettori

$$|n = 1, l = 1, m = 1\rangle, |n = 1, l = 1, m = 0\rangle, |n = 1, l = 1, m = -1\rangle.$$

$$|n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}} x = A(r) \cos \phi \sin \theta$$

$$|n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}} y = A(r) \sin \phi \sin \theta$$

$$|n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ell}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}} z = A(r) \cos \theta$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta \end{aligned}$$

otteniamo

$$|n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle = \frac{|n = 1, l = 1, m = 1\rangle + |n = 1, l = 1, m = -1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle = \frac{|n = 1, l = 1, m = 1\rangle - |n = 1, l = 1, m = -1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1\rangle = |n = 1, l = 1, m = 0\rangle.$$

Esercizio 7.2. Si consideri l'Hamiltoniana dell'atomo di un atomo di idrogeno, contenente, oltre all'interazione Coulombiana, un'interazione spin-orbita dell'elettrone

$$\mathbf{H}_{SO} = A \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}}_e,$$

e l'interazione fra lo spin dell'elettrone e lo spin del protone ($S_e = S_p = \frac{1}{2}$)

$$\mathbf{H}_{SS} = B \vec{\mathbf{S}}_p \cdot \vec{\mathbf{S}}_e.$$

1. Dire qual è la degenerazione dei livelli $n = 1$ e $n = 2$, tenendo conto anche dello spin dell'elettrone e del protone, quando si trascurano del tutto le interazioni di cui sopra.
2. Trascurando solo l'interazione $\mathbf{H}_{SS}$, si classifichino i livelli di $n = 1$ e $n = 2$ dell'atomo mediante gli operatori:

$$\vec{\mathbf{L}}^2, \vec{\mathbf{J}}^2, \vec{\mathbf{F}}^2, \mathbf{F}_z,$$

con

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}} &= \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}_e \\ \vec{\mathbf{F}} &= \vec{\mathbf{J}} + \vec{\mathbf{S}}_p \end{aligned}$$

e si calcolino i relativi autovalori dell'energia.

3. Alcuni degli stati di cui al punto (2) sono anche autostati dell'Hamiltoniana totale. Dire quali e con quali autovalori.

Esercizio 7.3. Una misura di momento angolare orbitale lungo un asse nell'atomo di idrogeno fornisce sempre il valore $7\hbar$. Determinare il valore minimo che può fornire una misura di energia su tale stato.