

24 ottobre 2025

1 Relazione di dispersione

Esercizio 1. Data l'equazione di Schroedinger per una particella libera 1D

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t),$$

1. determinare le condizioni generali che devono soddisfare il modulo e la fase di $\psi = \rho(x, t) e^{i\theta(x, t)}$.
2. Prendendo il caso particolare dell'onda piana $\psi = \rho e^{i(kx - \omega t)}$, determinare la relazione di dispersione $\omega(k)$.

Sol: L'equazione di Schroedinger si può scrivere come

$$i \left(\dot{\rho} + i\dot{\theta}\rho \right) e^{i\theta} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d}{dx} (\rho' + i\theta'\rho) e^{i\theta} = -\frac{\hbar}{2m} (\rho'' + i\theta''\rho + 2i\theta'\rho' - \theta'^2\rho) e^{i\theta},$$

$$i\dot{\rho} - \dot{\theta}\rho = -\frac{\hbar}{2m} (\rho'' + i\theta''\rho + 2i\theta'\rho' - \theta'^2\rho),$$

separando parte reale e immaginaria

$$\dot{\theta}\rho = \frac{\hbar}{2m} (\rho'' - \theta'^2\rho),$$

$$\dot{\rho} = -\frac{\hbar}{2m} (\theta''\rho + 2\theta'\rho')'.$$

Per l'onda piana le equazioni danno luogo alla legge di dispersione

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2.$$

Nota: i valori medi dell'energia e dell'impulso soddisfano $\langle E \rangle = \hbar\omega$. e $\langle p \rangle = \hbar k$ soddisfano $\langle E \rangle = \langle p \rangle^2 / 2m$.

2 Evoluzione nella rappresentazione di Heisenberg

Nella rappresentazione di Heisenberg sono gli operatori e non gli stati ad evolvere. Applicando un operatore su uno stato che evolve si ottiene

$$\mathbf{A}_S |v(t)\rangle_S = \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) |v(0)\rangle_S = |u(t)\rangle_S = \mathbf{U}(t) |u(0)\rangle_S,$$

che, moltiplicando a sinistra per $\mathbf{U}^\dagger(t)$, diventa

$$\mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) |v(0)\rangle = |u(0)\rangle,$$

ossia l'azione dell'operatore in rappresentazione di Heisenberg

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t),$$

avente come input e output i due stati iniziali indipendenti dal tempo (rappresentazione di Heisenberg degli stati)

$$\mathbf{A}_H(t) |v\rangle_H = |u\rangle_H.$$

L'equivalenza di queste due rappresentazioni è evidente anche nel calcolo dei valori medi

$$\langle \mathbf{A}_S \rangle = \langle \psi(t) | \mathbf{A}_S | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \mathbf{A}_H(t) | \psi(0) \rangle = \langle \mathbf{A}_H \rangle.$$

Più in generale, gli operatori potrebbero avere una dipendenza parametrica dal tempo anche in rappresentazione di Schroedinger, in questo caso

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \mathbf{U}(t).$$

- L'evoluzione degli operatori è data da

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \dot{\mathbf{U}}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \dot{\mathbf{A}}_S(t) \mathbf{U}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} \mathbf{U}^\dagger(t) [\mathbf{H}(t), \mathbf{A}_S(t)] \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \dot{\mathbf{A}}_S(t) \mathbf{U}(t)$$

- Nel caso in cui $\mathbf{A}_S$ e $\mathbf{H}$ sono indipendenti dal tempo si ottiene

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{A}_H(t)].$$

- Notare che se

$$[\mathbf{H}, \mathbf{A}_S] = 0,$$

allora

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{A}_S,$$

ossia $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_H$ è una quantità conservata.

- Data un'Hamiltoniana di singola particella in un potenziale si ha

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}(\mathbf{x}),$$

$$[\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}^2, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] = -i \frac{\hbar}{m} \mathbf{p},$$

per calcolare

$$[\mathbf{H}, \mathbf{p}] = [\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{p}],$$

possiamo sviluppare in serie di potenze il potenziale

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \sum_n v_n \mathbf{x}^n,$$

e notare che il commutatore fra l'impulso e una potenza intera della posizione è

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}^n, \mathbf{p}] &= \mathbf{x} [\mathbf{x}^{n-1}, \mathbf{p}] + [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-1} = \\ &= \mathbf{x}^2 [\mathbf{x}^{n-2}, \mathbf{p}] + \mathbf{x} [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-2} + [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-1} = \\ &= \dots = n \mathbf{x}^{n-1} i\hbar \end{aligned}$$

per cui

$$[\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{p}] = i\hbar \mathbf{V}'(\mathbf{x}).$$

Le equazioni del moto per gli operatori in rappresentazione di Heisenberg sono quindi equivalenti a quelle classiche

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m} \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -\mathbf{V}'(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

- Per i valori medi vale il **Teorema di Ehrenfest**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m} \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle &= - \left\langle \frac{dV}{dx}(\mathbf{x}) \right\rangle \end{aligned}$$

Esercizio 2. Studiare per una particella 1D sottoposta a una forza costante le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi.

Sol: Una forza costante F corrisponde a un'energia potenziale $V(\mathbf{x}) = -F\mathbf{x}$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - F\mathbf{x},$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = F\mathbf{I}, \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) + \mathbf{I}Ft, \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(0) + \frac{\mathbf{p}(0)}{m}t + \mathbf{I}\frac{F}{2m}t^2. \end{aligned}$$

Valori medi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}, \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle &= +F, \\ \langle \mathbf{p}(t) \rangle &= \langle \mathbf{p}(0) \rangle + Ft, \\ \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}(0) \rangle + \frac{\langle \mathbf{p}(0) \rangle}{m}t + \frac{F}{2m}t^2. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Studiare per una particella 1D sottoposta a una forza elastica le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi.

Sol: Energia potenziale elastica: $V(\mathbf{x}) = \frac{k}{2}\mathbf{x}^2$.

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\mathbf{x}^2, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -k\mathbf{x}.\end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione del moto è il moto armonico con frequenza $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(0) \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \mathbf{p}(0) \sin \omega t, \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) \cos \omega t - m\omega \mathbf{x}(0) \sin \omega t,\end{aligned}$$

Valori medi:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}, \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle &= -k \langle \mathbf{x} \rangle, \\ \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}(0) \rangle \cos \omega t + \frac{\langle \mathbf{p}(0) \rangle}{m\omega} \sin \omega t, \\ \langle \mathbf{p}(t) \rangle &= \langle \mathbf{p}(0) \rangle \cos \omega t - m\omega \langle \mathbf{x}(0) \rangle \sin \omega t.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Studiare per una particella 1D con un'energia potenziale $V \propto \mathbf{x}^4$ le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi. Confrontare con l'analogo caso classico.

Sol:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \gamma \mathbf{x}^4, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -3\gamma \mathbf{x}^3.\end{aligned}$$

Valori medi:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}, \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle &= -3\gamma \langle \mathbf{x}^3 \rangle.\end{aligned}$$

Notare che in questo caso, le equazioni per i valori medi differiscono dal caso classico perché $\langle \mathbf{x}^3 \rangle \neq \langle \mathbf{x} \rangle^3$.

Esercizio 5. Studiare l'evoluzione del pacchetto gaussiano per una particella libera in rappresentazione di Heisenberg. In particolare calcolare, $\langle \mathbf{x}_H(t) \rangle$, $\langle \mathbf{p}_H(t) \rangle$, $\langle \Delta^2 \mathbf{x}_H(t) \rangle$, $\langle \Delta^2 \mathbf{p}_H(t) \rangle$ e $\langle \mathbf{T}_H(t) \rangle$. Considerare il caso in cui la fase del pacchetto è $\varphi(x) = kx$ (caso balistico).

Sol: Per una particella libera

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

e l'evoluzione degli operatori posizione e quantità di moto è

$$\dot{\mathbf{p}}_H = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}_H] = 0,$$

$$\dot{\mathbf{x}}_H = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}_H] = \frac{i}{\hbar 2m} [\mathbf{p}_H^2, \mathbf{x}_H] = \frac{\mathbf{p}_H}{m},$$

con condizioni iniziali

$$\mathbf{p}_H(0) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x}_H(0) = \mathbf{x}.$$

La soluzione è quindi

$$\mathbf{p}_H(t) = \mathbf{p},$$

$$\mathbf{x}_H(t) = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{m}t.$$

Se inizialmente la funzione d'onda è un pacchetto gaussiano

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = e^{i\varphi(x)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = e^{i\varphi(x)} \sqrt{g(x)},$$

la quantità di moto media è

$$\langle \mathbf{p}_H \rangle = \langle \psi | \mathbf{p}_H(t) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x),$$

ossia rimane costante nel tempo, come ci si aspetta. Se $\varphi(x) = kx$ allora $\langle \mathbf{p}_H \rangle = \hbar k$. Il quadrato della quantità di moto è anch'esso una quantità conservata e (vedi esercizio sul pacchetto gaussiano)

$$\langle \mathbf{p}_H^2 \rangle = \langle \mathbf{p}^2 \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle^2 + \sigma_p^2 = \hbar^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2},$$

e la varianza non cambia nel tempo. Se $\varphi(x) = kx$ allora $\langle \mathbf{p}_H^2 \rangle = \hbar^2 k^2 + \sigma_p^2$. La posizione media è

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_H \rangle &= \langle \psi | \mathbf{x}_H(t) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{x} | \psi \rangle + \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle \frac{t}{m} = \\ &= x_0 + \frac{t}{m} \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x), \end{aligned}$$

se $\varphi(x) = kx$ si sposta linearmente nel tempo

$$\langle \mathbf{x}_H(t) \rangle = x_0 + \frac{\hbar k}{m}t.$$

Per studiare le fluttuazioni utilizziamo

$$\mathbf{x}_H^2(t) = \mathbf{x}^2 + \frac{\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{p}}{m}t + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}t^2 = \mathbf{x}^2 + \frac{2\mathbf{x}\mathbf{p} - i\hbar}{m}t + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}t^2.$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \mathbf{x} \mathbf{p} | \psi \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \psi^*(x) \psi'(x) = \\
&= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) - i\frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x g'(x) = \\
&= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) - i\frac{\hbar}{2} [xg(x)]_{-\infty}^{\infty} + i\frac{\hbar}{2} = \\
&= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) + i\frac{\hbar}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_H^2(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}^2 \rangle + \frac{2\langle \mathbf{x} \mathbf{p} \rangle - i\hbar}{m} t + \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{m^2} t^2 = \\
&= \sigma^2 + x_0^2 + \frac{2\hbar t}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) + \frac{\hbar^2}{m} t^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2} t^2, \\
\langle \Delta^2 \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}_H^2(t) \rangle - \langle \mathbf{x}_H(t) \rangle^2 = \\
&= \sigma^2 + \frac{2\hbar t}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - x_0) \varphi'(x) g(x) + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2} t^2.
\end{aligned}$$

Se $\varphi(x) = kx$

$$\langle \Delta^2 \mathbf{x}(t) \rangle = \sigma^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2} t^2.$$

L'energia cinetica media è

$$\langle \mathbf{T}_H(t) \rangle = \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{8\sigma^2 m^2},$$

se $\varphi(x) = kx$

$$\langle \mathbf{T} \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{8\sigma^2 m^2},$$

notare che essa è diversa da zero anche se $k = 0$ (fluttuazioni quantistiche). La densità di probabilità della quantità di moto è (vedi esercizio sul pacchetto gaussiano) è

$$\rho(p) = |\phi(p)|^2 = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\hbar} e^{-\frac{2\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}},$$

gli autovalori dell'Hamiltoniana (le energie del sistema) sono

$$E(p) = \frac{p^2}{2m},$$

per cui la densità di probabilità dell'energia è

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \frac{\delta\left(p - \sqrt{2mE}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} + \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \frac{\delta\left(p + \sqrt{2mE}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} = \\
&= \sqrt{\frac{m}{\pi}} \frac{\sigma}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} \left(e^{-\frac{2\sigma^2(\sqrt{2mE}-\hbar k)^2}{\hbar^2}} + e^{-\frac{2\sigma^2(\sqrt{2mE}+\hbar k)^2}{\hbar^2}} \right) = 2\sqrt{\frac{m}{\pi}} \frac{\sigma}{\hbar} e^{-2\sigma^2 k^2} e^{-\frac{4\sigma^2 m E}{\hbar^2}} \frac{\cosh \frac{4\sigma^2 k \sqrt{2mE}}{\hbar}}{\sqrt{E}} = \\
&= \frac{m}{\sigma_p^2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2\sigma_p^2}} e^{-\frac{mE}{\sigma_p^2}} \frac{\cosh \frac{\hbar k \sqrt{2mE}}{\sigma_p^2}}{\frac{\sqrt{mE}}{\sigma_p}}
\end{aligned}$$