Due corpi in una dimensione (distribuzione ridotta per uno)

$$\mathcal{H} = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V(x_1 - x_2) \qquad \text{stesse masse}$$

$$= \underbrace{\frac{P^2}{4m}}_{\text{baricentro}} + \underbrace{\frac{p^2}{m} + V(x)}_{\text{relativo}}$$

Supponiamo che nella coordinata relativa ho abbiamo stati legati in tal caso l'autofunzione è

$$\Psi(X, x) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}PX}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \varphi_n(x) = e^{\frac{i}{\hbar}P\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)} \varphi_n(x_1 - x_2)$$

Corrispondente alle energie

$$E_{P,n} = \frac{P^2}{4m} + E_n \text{ relativa}$$

Se voglio conoscere la distribuzione di probabilità ridotta ad 1 particella (es la 1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, |\varphi_n(x_1, x_2)|^2 = \rho^{(1)}(x_1)$$

e questa risulta limitata in effetti

$$\lim_{|x_1| \to \infty} \rho^{(1)}(x_1) = 0$$ poiché lo stato è legato (ma è vero?)

NO!

facciamo il caso dell'oscillatore armonico

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\psi_0 = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}}{(\pi \ell^2)^{1/4}} \qquad \ell = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{K}}$$

$$\psi(x_1 x_2) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} P\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}}{(\pi \ell^2)^{1/4}}$$

$$|\psi(x_1 x_2)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{\ell^2}}}{\sqrt{\pi \ell^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, |\psi(x_1 x_2)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{\pi \ell^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \underbrace{e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{\ell^2}}}_{\sqrt{\pi \ell^2}} \quad \text{cambio var!}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, |\psi(x_1 x_2)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \quad \text{Corretto!}$$

Se prendo la normalizzazione delle onde piane $1/\sqrt{L}$ ed assumo che $L \ggg \ell$

$$\psi(x_1 x_2) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i}{\hbar} P\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)} \frac{1}{(\pi \ell^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{2\ell^2}}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \int_{-L/2}^{L/2} dx_2 \, \frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{\pi \ell^2}} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{\ell^2}} \cong 1/L$$

In generale io ho

$$\psi(X, x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i}{\hbar} PX} \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i}{\hbar} P\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)} \varphi_n(x_1 - x_2)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx_2 \, |\psi(x_1, x_2)|^2 = \frac{1}{L} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, |\varphi_n(x_1 - x_2)|^2}_{=1} = \frac{1}{L}$$