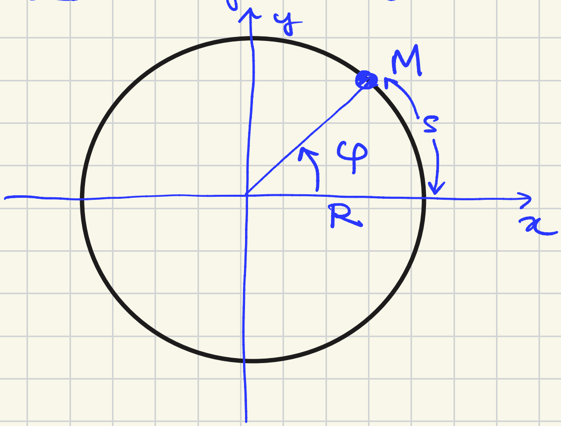
Il rotatore quantistico

Consideriamo una particella vincolata su un cerchio



$s = R\varphi$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi(s) = E\,\psi(s) \qquad H \doteq -\frac{\hbar^2}{2MR^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Rotatore costretto nel piano x-y ha solo $\boxed{L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}}$

$$H = \frac{L_z^2}{2MR^2}$$

I momento d'inerzia rispetto all'origine

Se voglio una funzione $\psi(\varphi)$ non polidroma

$$\psi(\varphi + 2k\pi) = \psi(\varphi)$$

allora gli autostati sono $\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$

$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ gli autoval

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2MR^2}$$

condizioni periodiche $\Rightarrow$ m intero

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im(\varphi+2\pi)}$$ m intero

la normalizzazione è data da

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \, |\psi(\varphi)|^2 = 1$$

- Gli stati m e $-m$ ($m \neq 0$) sono degeneri in energia

dunque una $\forall$ combinazione lineare

$$A e^{im\varphi} + B e^{-im\varphi}$$

è autostato con una corrente non nulla

$$J = \frac{\hbar m}{MR} \left(|A|^2 - |B|^2\right)$$

nota che devo fare il gradiente curvilineo della fase

- L'energia di punto zero è nulla $E_{m=0}=0$

ho dei problemi se provo a definire

l'angolo coniugato con L_z

$$[\varphi, L_z] = i\hbar \mathbb{1}$$

e quindi sarebbe

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle \langle \Delta L_z^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Ma su un auto stato di L_z $\langle \Delta L_z^2 \rangle = 0$

e $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ è finito al contrario di quello

che accade fra x e p dove è sì vero

che su un auto stato dello p $\langle \Delta p^2 \rangle = 0$

ma se $\langle \Delta x^2 \rangle \to \infty$

Il problema è nel vincolo circolare quindi

un potenziale che vincoli la particella

a stare sul cerchio

$$V(x,y) = \delta(x^2+y^2-R^2) \leftarrow$$ non vincola le posizioni sul cerchio

$$\varphi = \operatorname{arctg}(y/x) \qquad L_z = -i\hbar x\frac{\partial}{\partial y} + i\hbar y \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[\varphi, L_z]\psi = \varphi(L_z\psi) - L_z\varphi\psi = -(L_z\varphi) = i\hbar$$

effettivamente ma allora anche in 3d le fluttuazioni delle φ sono finite mentre le fluttuazioni di L_z sono nulle su una generica funzione $\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$$\langle \varphi^2 \rangle = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\, \varphi^2 \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, R_{nl}^2(r) \underbrace{|Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2}_{A_{lm}(\theta) \text{ indip da } \varphi} r^2}_{\neq 0} > 0$$