

fluttuazioni di energia cinetica ed energia
di punto zero nella buca ∞ di potenziale

Calcoliamo nello stato fondamentale della
buca ∞ di potenziale

$$\langle \Delta p^2 \rangle \text{ e } \langle \Delta x^2 \rangle$$

primo di tutto

a) $\langle p \rangle = 0$ b) $\langle x \rangle = 0$ (nel riferimento simmetrico)

a) In un 1D auto stato reale dello spettro discreto

$$\langle m | p | m \rangle = -i \hbar \underbrace{\int dx \psi_m(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_m(x)}_{\text{reale}} = 0$$

b) nel 1D simmetrico

$$\begin{aligned} \langle m | x | m \rangle &= \int_{-L/2}^{L/2} dx \psi_m(x) x \psi_m(x) = \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} dx \underbrace{\psi_m^2(x)}_{\text{pari}} x = 0 \end{aligned}$$

pari dispari

$$\langle 1 | p^2 | 1 \rangle = -\hbar^2 \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos(k_1 x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos(k_1 x)$$

$$(k_1 = \frac{\pi}{L}) = \hbar^2 \frac{2}{L} k_1^2 \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos^2(k_1 x)$$

ma le funzioni sono normalizzate per cui

$$\frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos^2(k_1 x) = 1$$

dunque

$$\langle 1 | p^2 | 1 \rangle = \hbar^2 k_1^2$$

e quindi

$$E_1 = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \text{ è proprio } \frac{\langle 1 | p^2 | 1 \rangle}{2m}$$

l'energia di punto zero che a differenza del caso classico non è zero.

Calcoliamo nel riferimento simmetrico

$$\langle 1 | x^2 | 1 \rangle = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos^2(k_1 x) x^2$$

$$= \frac{2}{L k_1^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \cos^2(y) y^2$$

$$y = k_1 x = \frac{\pi x}{L}$$

$$y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy y^2 \cos^2(y) = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}$$

e si calcola col cos double → 2 integrali

$$y_1 = \int dy [\cos^2(y) + \sin^2(y)] y^2 = \int dy y^2$$

$$y_2 = \int dy [\cos^2(y) - \sin^2(y)] y^2 = \int dy \cos(2y) y^2 \quad (\text{per parti})$$

$$y = (y_1 + y_2) / 2$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | X^2 | 1 \rangle &= \frac{2}{L(\pi/L)^3} \left[\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} \right] \\ &= L^2 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right] \end{aligned}$$

Il prodotto di indeterminazione è quindi

$$\langle 1 | \Delta p^2 | 1 \rangle \langle 1 | \Delta x^2 | 1 \rangle = \hbar^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 L^2 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right]$$

$$= \hbar^2 \underbrace{\pi^2 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right]}_{\sim 0,322} > \frac{\hbar^2}{4}$$

posso quindi porre in relazione le fluttuazioni del momento con l'energia di punto zero e tramite l'indet. con le fluttuazioni di posizione

$$E_1 = \frac{\langle 1 | \Delta p^2 | 1 \rangle}{2m}$$

$$2m E_1 \langle 1 | \Delta x^2 | 1 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$E_1 \geq \frac{\hbar^2}{8m \langle 1 | \Delta x^2 | 1 \rangle}$$

così che ha sempre $E_1 > 0$