

Gas Quantistici

$$Z = \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \sum_k \epsilon_k n_k} \delta_{N, \sum_k n_k} \quad \text{canonico}$$

vincolo su # totale particelle

$$Z_{ge} = \sum_N \left(\sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \sum_k \epsilon_k n_k} \delta_{N, \sum_k n_k} \right) e^{\beta \mu N} \quad \text{Grand canonico}$$

$$Z_{ge} = \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \sum_k (\epsilon_k - \mu) n_k} = \sum_{\{n_k\}} \prod_k e^{-\beta (\epsilon_k - \mu) n_k}$$

$$Z_{ge} = \prod_k \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta (\epsilon_k - \mu) n_k} \quad \begin{array}{l} M=1 \text{ FERMI} \\ M=\infty \text{ BOSE} \end{array}$$

$$Z_{ge} = \prod_k \begin{cases} 1 + e^{-\beta (\epsilon_k - \mu)} & \text{FERMI} \\ \frac{1}{1 - e^{-\beta (\epsilon_k - \mu)}} & \text{BOSE} \end{cases}$$

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{ge}$$

$$\Omega = \mp \frac{1}{\beta} \sum_k \ln (1 \pm e^{-\beta (\epsilon_k - \mu)})$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \pm \frac{1}{\beta} \sum_k \frac{(\pm) \beta e^{-\beta (\epsilon_k - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta (\epsilon_k - \mu)}}$$

$$\langle N \rangle = \sum_k \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_k - \mu)} \pm 1}$$

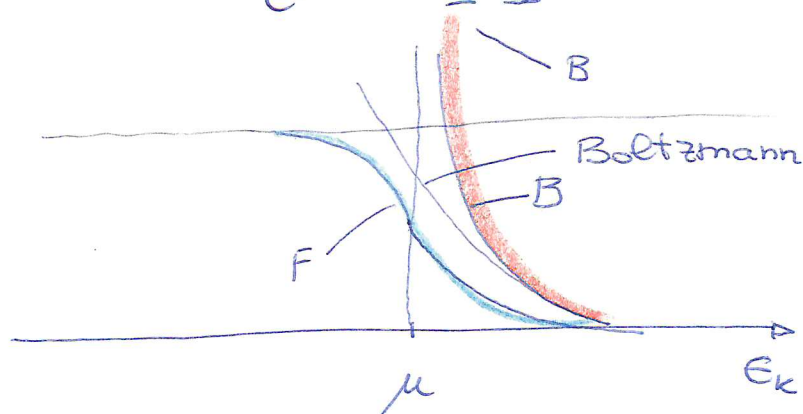
$$\langle N \rangle = \sum_k \langle n_k \rangle$$

Fermi / Bose

Boltzmann

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1}$$

$$\langle n_k \rangle = e^{-\beta(E_k - \mu)}$$



Bosoni
 $\mu < \min_k E_k$

~~La densità degli stati~~

Il limite classico formalmente $z = e^{\beta\mu} \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow -\infty$)

$$PV = -\Omega$$

$$1) PV = \pm \frac{1}{\beta} \sum_k \ln(1 \pm z e^{-\beta E_k})$$

$$2) \langle N \rangle = \sum_k \frac{1}{e^{\beta E_k} / z \pm 1} = \sum_k \frac{z}{e^{\beta E_k} \pm z}$$

in 1) $z \rightarrow 0$

$$\ln(1 \pm z e^{-\beta E_k}) \approx \pm z e^{-\beta E_k}$$

$$PV = \frac{1}{\beta} z \sum_k e^{-\beta E_k}$$

$$\langle N \rangle = z \sum_k e^{-\beta E_k}$$

$$Z^{(\pm)} = \sum_k e^{-\beta E_k} \text{ classicamente}$$

$$PV = \frac{1}{\beta} Z Z^{(1)}$$

$$\langle N \rangle = Z Z^{(1)}$$

$$PV = \frac{\langle N \rangle}{\beta} = \langle N \rangle k_B T$$

Ricordiamo il risultato già trovato dove

$$Z_{ge} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \frac{(Z^{(1)})^N}{N!} = \exp(\underbrace{e^{\beta \mu} Z^{(1)}}_Z)$$

$$PV = \frac{1}{\beta} Z Z^{(1)}$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = Z Z^{(1)} \text{ che sono le espressioni trovate}$$

$$\text{con } Z^{(1)} = \sum_{\mathbf{k}} e^{-\beta \epsilon_{\mathbf{k}}} = \frac{V}{h^3} \int d^3 p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} = \frac{V}{\lambda_{DB}^3}$$

per i gas classici inoltre

$$\langle N \rangle = Z \frac{V}{\lambda_{DB}^3} \quad Z = \frac{\lambda_{DB}^3}{V} \langle N \rangle$$

$$\frac{V}{\langle N \rangle} = l^3 \text{ distanza fra particelle}$$

$$Z = \left(\frac{\lambda_{DB}}{l} \right)^3 \quad Z \ll 1 \Rightarrow \lambda_{DB} \ll l$$

Gas in volume macroscopico: la densità degli stati

Definisco formalmente

$$N(\epsilon) = \sum_k \delta(\epsilon - \epsilon_k)$$

↑
energia delle particelle
somma su tutti gli stati comprese le
eventuali degenerazioni spin

per cui conoscendo $N(\epsilon)$ trasferisco come per molti indici (k) un'integrazione ϵ

$$\sum_k f(\epsilon_k) = \int d\epsilon N(\epsilon) f(\epsilon)$$

in fatti

$$\int d\epsilon N(\epsilon) f(\epsilon) = \sum_k \int d\epsilon \delta(\epsilon - \epsilon_k) f(\epsilon) = \sum_k f(\epsilon_k)$$

per esempio per un gas di particelle non relativistiche a $d=3$ ho che

$$\sum_k \rightarrow \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z}$$

$$\epsilon_{n_x n_y n_z}^{(4)} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{n_x \pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L} \right)^2 \right]$$

abbiamo già visto che posso trasformare le
somme in integrali $\Delta p = \hbar \pi / L \ll \sqrt{\langle p^2 \rangle}$

$$\sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \longrightarrow \frac{L^3}{h^3} \int d^3 p$$

Dunque la densità degli stati è

$$N(\epsilon) = g \frac{L^3}{h^3} \int d^3 p \delta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right)$$

↑
eventuale degenerazione di spin

Coordinate sferiche dp solo modulo

$$N(\epsilon) = g \frac{L^3}{h^3} (4\pi) \int_0^\infty dp p^2 \delta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right)$$

$$u = \frac{p^2}{2m} \quad p = \sqrt{2mu} \quad dp = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{u}} du$$

$$\int dp p^2 \rightarrow \sqrt{2m} \int \frac{du}{\sqrt{u}} 2mu \rightarrow (2m)^{3/2} \int du \sqrt{u}$$

$$N(\epsilon) = g \frac{L^3}{h^3} (4\pi) \frac{(2m)^{3/2}}{2} \sqrt{\epsilon}$$

Un calcolo più generale a d dimensioni
 è dato da...

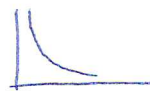
$$N(\epsilon) = g \frac{L^d}{h^d} \Omega_d \int_0^\infty dp p^{d-1} \delta(\epsilon - p^2/2m)$$

$$N(\epsilon) = g \frac{L^d}{h^d} \Omega_d \frac{1}{2} (2m)^{d/2} \epsilon^{\frac{d}{2}-1}$$

particelle
 massive
 non relativistiche

$$d=1 \quad \Omega_1 = 2 \quad d=2 \quad \Omega_2 = 2\pi \quad d=3 \quad \Omega_3 = 4\pi$$

$$d=1 \quad N(\epsilon) \sim 1/\sqrt{\epsilon}$$



$$d=2 \quad N(\epsilon) \sim \text{const}$$



$$d=3 \quad N(\epsilon) \sim \sqrt{\epsilon}$$



possiamo generalizzare a particelle con dispersione
quadratica p.e. ultrarelativistiche

$$\omega = c|k| \quad \text{la luce}$$

$$\epsilon = c|p|$$

$$N(\epsilon) = g \frac{L^3}{h^3} 4\pi \int_0^\infty dp p^2 \delta(\epsilon - cp)$$

$$N(\epsilon) = g \frac{L^3}{h^3} 4\pi \frac{\epsilon^2}{c^3}$$

particelle
ultrarelativistiche ($m=0$)

for $g=2$ 2 polarizzazioni

Questo mi serve per considerare un
gas di fotoni racchiuso in una scatola



corpo nero

come si vede per un volume macroscopico

$$N(\epsilon) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{const}}}{c} V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{volume}}}{\epsilon^\alpha}$$

legge di potenza

Usando la Densità degli stati le equazioni per la termodinamica dei gas quantistici diventano

$$PV = \pm \frac{1}{\beta} \int d\epsilon N(\epsilon) \ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon - \mu)})$$

$$\langle N \rangle = \int d\epsilon N(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1}$$

o ci si può aggiungere

$$U = \sum_k \langle n_k \rangle \epsilon_k = \int d\epsilon N(\epsilon) \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1}$$

a questo punto posso trovare una relazione fra

PV ed U supponendo che $N(\epsilon) = c V \epsilon^\alpha$

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1} = \mp \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon - \mu)})$$

$$U = \mp \int d\epsilon N(\epsilon) \epsilon \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon - \mu)})$$

integrando per parti

$$U = \mp \frac{1}{\beta} \sum_{\epsilon} N(\epsilon) \ln(1 \pm e^{\beta(\epsilon - \mu)}) \Big|_0^{\infty}$$

$$\pm \frac{1}{\beta} \int d\epsilon \ln(1 \pm e^{\beta(\epsilon - \mu)}) \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \in N(\epsilon) \right)$$

il termine finito si annulla nelle ipotesi

$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$\epsilon N(\epsilon) \ln(1 \pm e^{\beta(\epsilon - \mu)})$$

fermioni μ finito $\epsilon > 0$ $\epsilon N(\epsilon) \sim \epsilon^{\alpha+1}$ $\alpha+1 > 0$

Bosoni per ogni $\mu < 0$ lo stesso $\epsilon N(\epsilon) \sim \epsilon^{\alpha+1}$

per $\mu = 0$ $\ln(1 - e^{-\beta\epsilon})$ $\epsilon N(\epsilon) \ln(\epsilon) \rightarrow 0$ stesso ip

$$\epsilon \rightarrow \infty \quad (\epsilon \gg \mu)$$

$$\ln(1 \pm e^{\beta(\epsilon - \mu)}) \sim \pm e^{\beta(\epsilon - \mu)} \text{ converg. expon}$$

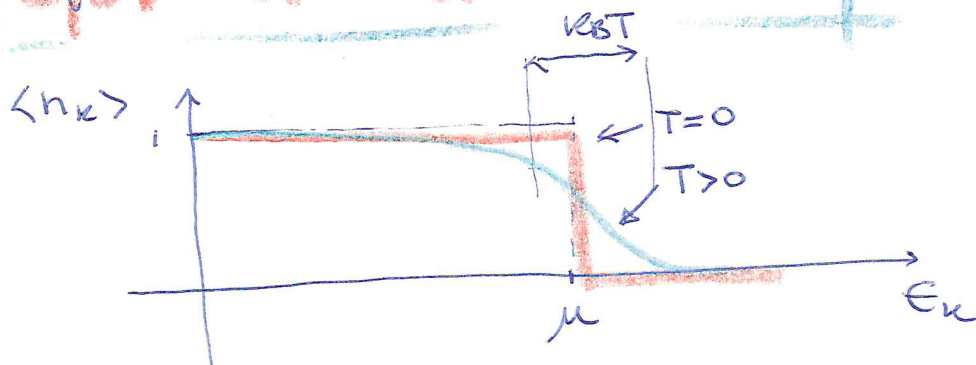
in queste ipotesi

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \epsilon N(\epsilon) = cV \frac{\partial}{\partial \epsilon} \epsilon^{\alpha+1} = cV (\alpha+1) \epsilon^{\alpha} = (\alpha+1) N(\epsilon)$$

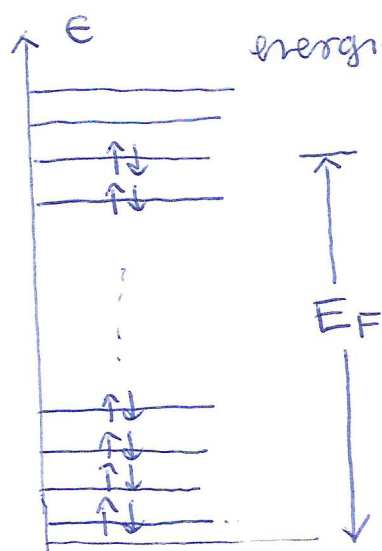
$$U = (\alpha+1) PV$$

$$PV = \frac{U}{\alpha+1}$$

Gas di Fermi a $T=0$



$\mu(T=0) = E_F$ energia di Fermi



energie di una particella $H^{(1)}|m\rangle = E_m|m\rangle$
per un gas in una scatola

$$E_{m_x m_y m_z} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{m_x \pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{m_y \pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{m_z \pi}{L} \right)^2 \right]$$

$$m_x, m_y, m_z = 1, 2, \dots$$

per scatole macroscopiche
la discretizzazione degli impulsi

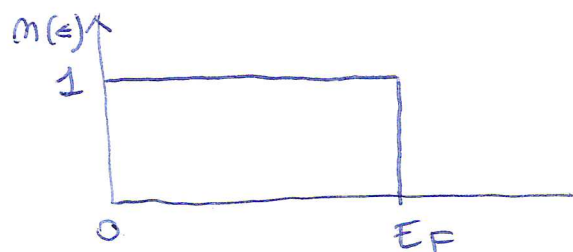
$$\Delta p = \frac{\pi \hbar}{L} \text{ è irrilevante}$$

a $T=0$ occupo con 2 fermioni di $s=1/2$ tutti i livelli

fino a E_F energia di Fermi

L'energia di Fermi dipende dalla densità

$$\langle N \rangle = \int_0^{E_F} d\epsilon N(\epsilon) \quad \text{perché a } T=0 \quad n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \begin{cases} 1 & \epsilon < E_F \\ 0 & \epsilon > E_F \end{cases}$$



per una generica dispersione

$$N(\epsilon) = c V \epsilon^\alpha$$

$$\langle N \rangle = c V \int_0^{E_F} d\epsilon \epsilon^\alpha = \frac{c V E_F^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

e quindi

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{c}{\alpha+1} E_F^{\alpha+1}$$

densità in numero ρ

per particelle non relativistiche a $d=3$

$$N(\epsilon) = g \frac{L^3}{h^3} (4\pi) \left(\frac{2m}{2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

$$\alpha = 1/2$$

$$\rho = \frac{g}{3} \frac{4\pi}{h^3} \left(\frac{2m}{2} \right)^{3/2} E_F^{3/2} \quad \alpha = 1/2$$

facile comporre k

$$\rho = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{3/2}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \rho)^{2/3}$$

definisco l'impulso di Fermi

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} K_F^2$$

$$K_F = (3\pi^2 \rho)^{1/3}$$

in generale per particelle massive

$$E_F = \left(\frac{\alpha+1}{c} \rho \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

$$\alpha = -1/2 \quad d=1 \quad E_F \propto \rho^2$$

$$\alpha = 0 \quad d=2 \quad E_F \propto \rho$$

$$\alpha = 1/2 \quad d=3 \quad E_F \propto \rho^{2/3}$$

la scala naturale di energia del gas di Fermi

è E_F e quando $k_B T \ll E_F$ i calcoli

effettuali a $T=0$ danno risultati attendibili per le funzioni termodinamiche

Per un metallo $\rho \sim 10^{28} \frac{\text{elettroni}}{\text{m}^3}$

$$E_F = \frac{(1 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot (9.1 \cdot 10^{-31})} (3 \cdot (3.14)^2 \cdot 10^{28})^{2/3}$$

$\uparrow$
 ρ

$\nearrow$
melettone

$$E_F \sim 0.2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

unità di misura energetica

elettronvolt = eV electronVolt

$$E_F \sim \text{eV}$$

$$1 \text{ eV} = e \cdot V = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ 1 volt

A quale temperatura corrisponde 1eV?

$$k_B T = 1 \text{ eV}$$

$1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$$T(1 \text{ eV}) = 1.16 \cdot 10^4 \text{ K}$$

possiamo definire la temperatura di Fermi con

$$k_B T_F = E_F$$

e le caratteristiche T_F sono dell'ordine dei 10000 K

Ricaviamo l'equazione di stato (interme)

per il gas di Fermi a $T=0$

$$PV = -\Omega$$

$$\Omega = U - \cancel{TS} - \mu N$$

$$\text{per } T=0 \quad S(T=0)=0 \quad \mu = E_F$$

$$PV = E_F N - U$$

dalla termodinamica

posso calcolare nell'insieme gran canonico

$$\langle N \rangle = \int d\epsilon N(\epsilon) \left(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \right) \xrightarrow{T \rightarrow 0} \int_0^{E_F} d\epsilon N(\epsilon)$$

$$U = \int d\epsilon N(\epsilon) \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \rightarrow \int_0^{E_F} d\epsilon N(\epsilon) \epsilon$$

per la espressione generale $N(\epsilon) = c V \epsilon^\alpha$

$$\langle N \rangle = c V \frac{E_F^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$U = c V \int_0^{E_F} d\epsilon \epsilon^{\alpha+1} = \frac{c V}{\alpha+2} E_F^{\alpha+2}$$

$$PV = E_F \langle N \rangle - U$$

$$PV = c V \frac{E_F^{\alpha+2}}{\alpha+1} - \frac{c V}{\alpha+2} E_F^{\alpha+2}$$

$$P = c \frac{\alpha+2 - \alpha - 1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} E_F^{\alpha+2} = c \frac{E_F^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

Usando invece le relazioni

$$PV = \frac{U}{\alpha+1}$$

arrivando alla stessa relazione

$$PV = \frac{cV}{(\alpha+1)(\alpha+2)} E_F^{\alpha+2}$$

$$\langle N \rangle = \frac{cV}{\alpha+1} E_F^{\alpha+1}$$

Si trova $E_F \sim \rho^{1/(\alpha+1)}$

la pressione del gas di Fermi $\sim \rho^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}$

nel caso di particelle massive non relativistiche
(elettroni) $\alpha = 1/2$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \rho)^{2/3}$$

$$\frac{VP}{\langle N \rangle} = \frac{E_F}{\alpha+2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{E_F}{\alpha+2}$$

$$P = \frac{\rho}{\alpha+2} E_F$$

$$P = \frac{2}{5} \rho \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \rho)^{2/3}$$

$$P \sim \rho^{5/3} \quad \text{gas de Fermi non relativistas a } T=0$$

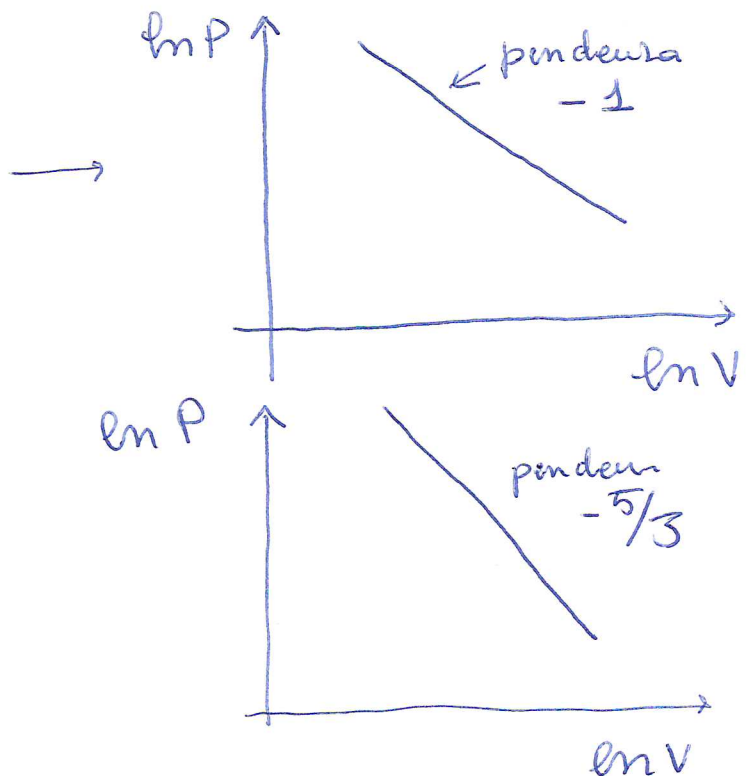
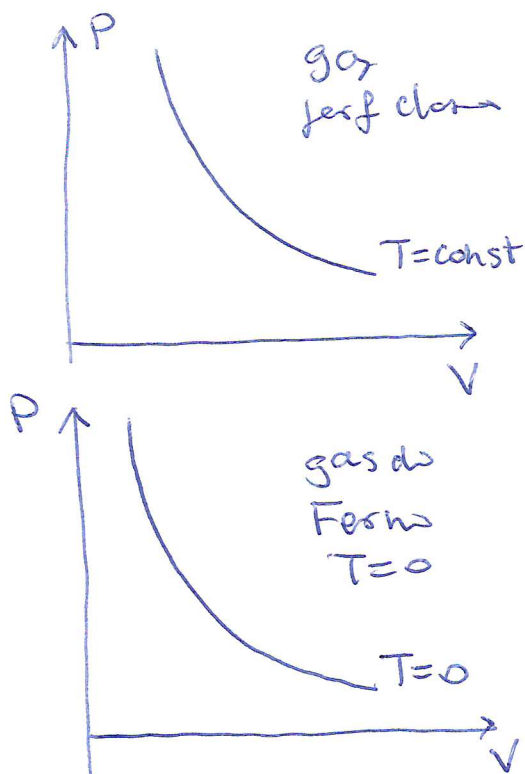
Confronto col gas perfetto classico

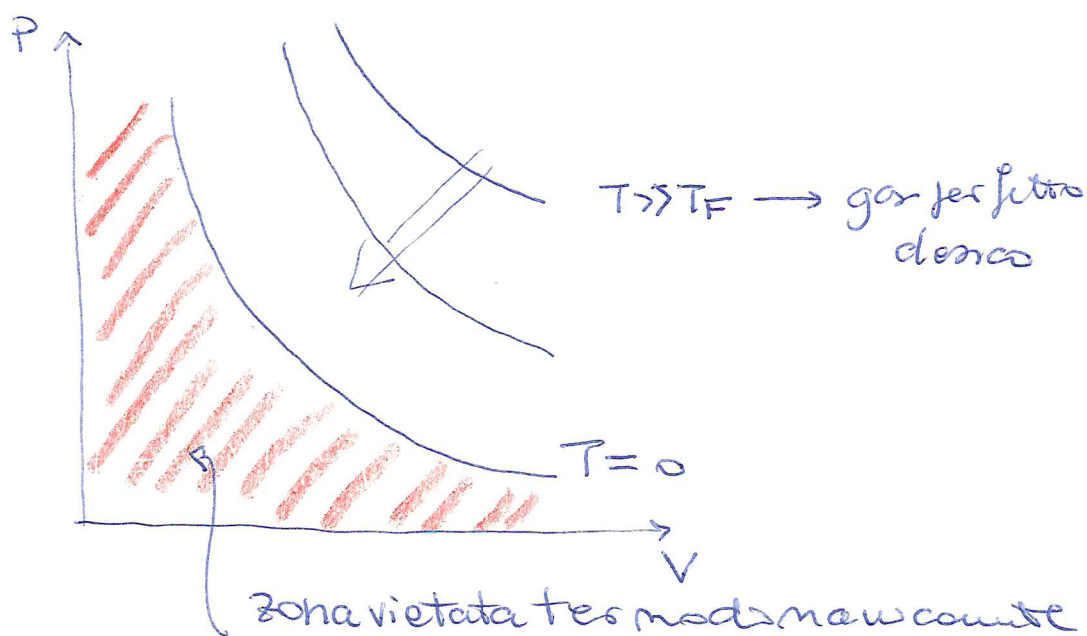
$$PV = N k_B T$$

$$P = \rho k_B T \sim \rho$$

$$\ln P = -\frac{5}{3} \ln V + \text{const} \quad \text{gas de Fermi } T=0$$

$$\ln P = -\ln V + \text{const}(T) \quad \text{gas perfetto classico}$$





a causa del principio di esclusione per comprimere
un gas di Fermi a $T=0$ ha bisogno di una
pressione crescente come $1/V^{5/3}$
se voglio diminuire il volume

L'approssimazione non relativistica è corretta
per elettroni nei metalli?

confronto scale energie
elettronica E_F

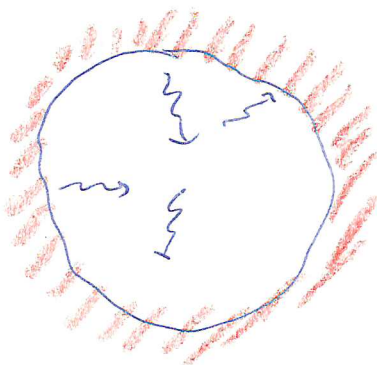
con massa a riposo elettrone mc^2

$$\frac{E_F}{mc^2} \approx \frac{1 \text{ eV}}{mc^2} = \frac{1.16 \cdot 10^{-19}}{9.1 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2} = 2 \cdot 10^{-6} \ll 1 \text{ ok}$$

gas quantistico a $\mu=0$, gas di fotoni
e pressione di radiazione

$\mu=0$ non spendo energia per introdurre
o sottrarre particelle in un sistema
aperto

Radiazione in equilibrio termodinamico
con le pareti $\Rightarrow$ CORPO NERO



le pareti a temp T
assorbono ed emettono
fotoni $\mu=0$

L'equazione di stato si determina da

$$PV = \frac{U}{\alpha + 1}$$

$$U = \int d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} \pm 1}$$

tutte le dipendenze dalla temperatura sono
esplicitate perche $\mu=0$

$$U = cV \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{\alpha+1}}{e^{\beta\epsilon} \pm 1} = \frac{cV}{\beta^{\alpha+2}} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha+1}}{e^x \pm 1}}_{g_\alpha^{(\pm)}}$$

Fermi

per $x=0$ l'integrale converge se $\alpha+1 > -1$ $\alpha > -2$

Bose

per $x=0$ $\frac{x^{\alpha+1}}{1+x-1} \approx x^\alpha$ l'integrale converge se $\alpha > -1$

per $x \rightarrow \infty$ non ha problema perché ha l' e^x

$$P = cV \frac{(k_B T)^{\alpha+2}}{\alpha+1} g_\alpha^{(\pm)}$$

la pressione è indipendente dal volume!

per i fotoni (bosoni) $g=2$ $\alpha=2$

$$N(\epsilon) = 8\pi \frac{V}{(hc)^3} \epsilon^2$$

velocità luce!

$$P = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{(hc)^3} (k_B T)^4 \frac{\pi^2}{15}$$

pressione di radiazione

