

Lezione 12/10/2023

0.1 Traslazioni

L'operatore di traslazione in 1D è

$$\mathcal{T}_a = e^{-i\frac{\mathbf{P}a}{\hbar}}.$$

- Esso trasla di a la funzione d'onda

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x-a),$$

come appare chiaro dallo sviluppo

$$\psi(x-a) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \right) \psi(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{P} \right)^n \right) \psi(x) = e^{-i\frac{\mathbf{P}a}{\hbar}} \psi(x).$$

- Lo si può vedere anche scrivendo esplicitamente la rappresentazione dello stato traslato e inserendo una completezza espressa nella base degli autostati dell'impulso

$$\langle x | \mathcal{T}_a | \psi \rangle = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | \psi \rangle e^{-i\frac{pa}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp e^{i\frac{p(x-a)}{\hbar}} \tilde{\psi}(p) = \psi(x-a).$$

- Gli elementi di matrice nella posizione sono

$$\langle x | \mathcal{T}_a | x' \rangle = \delta(x - x' - a),$$

ossia l'azione dell'operatore di traslazione sull'autostato della posizione è

$$\mathcal{T}_a | x \rangle = | x + a \rangle.$$

- Azione sugli operatori:

$$\mathbf{x} | x \rangle = x | x \rangle$$

$$\mathbf{x} \mathcal{T}_a | x \rangle = \mathbf{x} | x + a \rangle = (x + a) | x + a \rangle$$

$$\mathcal{T}_a^\dagger \mathbf{x} \mathcal{T}_a | x \rangle = (x + a) \mathcal{T}_a^\dagger | x + a \rangle$$

ossia

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathcal{T}_a^\dagger \mathbf{x} \mathcal{T}_a = \mathbf{x} + \mathbf{I}a.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare anche derivando rispetto ad a

$$\frac{\partial}{\partial a} \bar{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar} \mathcal{T}_a^\dagger [\mathbf{p}, \mathbf{x}] \mathcal{T}_a = \mathbf{I}$$

- In 3D, le traslazioni lungo le differenti direzioni commutano

$$\mathcal{T}_{\vec{r}_0} = e^{-i\frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{r}_0}{\hbar}} = e^{-i\frac{\mathbf{p}_x x_0}{\hbar}} e^{-i\frac{\mathbf{p}_y y_0}{\hbar}} e^{-i\frac{\mathbf{p}_z z_0}{\hbar}} = \mathcal{T}_{x_0}^{(x)} \mathcal{T}_{y_0}^{(y)} \mathcal{T}_{z_0}^{(z)}.$$

- La traslazione è una trasformazione unitaria poiché $\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{r}_0$ è hermitiano

$$\mathcal{T}_{\vec{r}_0}^\dagger = \mathcal{T}_{\vec{r}_0}^{-1}$$

- La traslazione lascia invariato l'impulso perché commuta con esso

$$[\mathcal{T}_{\vec{r}_0}^\dagger, \mathbf{p}_j] = 0.$$

Tutti gli operatori che commutano con il generatore della traslazione sono invarianti per traslazioni.

0.2 Evoluzione dello stato (rappresentazione di Schroedinger)

In rappresentazione di Schroedinger gli operatori non evolvono (ma possono dipendere esplicitamente dal tempo), mentre gli stati evolvono secondo l'equazione di Schroedinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \mathbf{H}(t) |\psi(t)\rangle.$$

Lo stato evoluto si ottiene applicando allo stato iniziale l'operatore di evoluzione temporale

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t) |\psi(0)\rangle,$$

il quale soddisfa l'equazione differenziale

$$i\hbar \dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{U}(t),$$

con condizione iniziale $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$. L'equazione precedente può essere scritta in forma di equazione integrale come

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \mathbf{H}(\tau) \mathbf{U}(\tau).$$

Da quest'ultima è possibile scrivere formalmente la soluzione in forma di serie (serie di Dyson)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \mathbf{H}(\tau) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \mathbf{H}(\tau) \mathbf{H}(\tau') \\ &\quad + \frac{i}{\hbar^3} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \mathbf{H}(\tau) \mathbf{H}(\tau') \mathbf{H}(\tau'') + \dots = \\ &= \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \mathbf{F}_1(t) - \frac{1}{\hbar^2} \mathbf{F}_2(t) + \frac{i}{\hbar^3} \mathbf{F}_3(t) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \mathbf{F}_n(t) \end{aligned}$$

con $\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}$ e

$$\mathbf{F}_n(t) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \mathbf{H}(\tau_1) \mathbf{H}(\tau_2) \dots \mathbf{H}(\tau_n).$$

- Nel caso di $\mathbf{H}$ indipendente dal tempo

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = -i \frac{\mathbf{H}}{\hbar} \mathbf{U}(t),$$

l'operatore di evoluzione è

$$\mathbf{U}(t) = e^{-i \frac{\mathbf{H}}{\hbar} t}.$$

È unitario

$$\mathbf{U}^\dagger(t) = e^{i \frac{\mathbf{H}}{\hbar} t},$$

$$\mathbf{U}(t) \mathbf{U}^\dagger(t) = \mathbf{I},$$

equivale quindi a un cambio di base. Mantiene la normalizzazione e preserva i prodotti scalari

$$\langle \psi(t) | \eta(t) \rangle = \langle \psi(0) | \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{U}(t) | \eta(0) \rangle = \langle \psi(0) | \eta(0) \rangle.$$

Per tempi infinitesimi

$$\mathbf{U}(dt) = \mathbf{I} - i \frac{\mathbf{H}}{\hbar} dt.$$

Quindi $\mathbf{H}$ è il generatore infinitesimo delle traslazioni temporali. Possiamo scrivere l'evoluzione temporale sfruttando la scomposizione in autostati dell'energia ottenuti come soluzione dell'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo

$$\mathbf{H} |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle,$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |E_n\rangle,$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \mathbf{U}(t) |\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} t} |E_n\rangle = \\ &= \sum_n c_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |E_n\rangle, \end{aligned}$$

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}.$$

Gli autostati di $\mathbf{H}$ sono **stati stazionari** (evolvono soltanto per un fattore di fase)

$$|E_n\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |E_n\rangle.$$

- Se $\mathbf{H}$ dipende dal tempo e se $[\mathbf{H}(t), \mathbf{H}(t')] = 0$ per qualsiasi t, t' si può mostrare che

$$\mathbf{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \mathbf{H}(\tau)}.$$

- In ogni caso $\mathbf{U}(t)$ è sempre unitario. Questo si può vedere notando che

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{U}(t) &= i\hbar \mathbf{U}^\dagger(t) \dot{\mathbf{U}}(t) = i\hbar \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{U}(t)) - \dot{\mathbf{U}}^\dagger(t) \mathbf{U}(t) \right] = \\ &= i\hbar \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{U}(t)) - \frac{i}{\hbar} \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{U}(t) \right] = \\ &= i\hbar \frac{d}{dt} (\mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{U}(t)) + \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{U}(t) \end{aligned}$$

ossia

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{U}(t)) = 0 \Rightarrow \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{U}(t) = \mathbf{I}.$$

Esercizio 1. Data l'Hamiltoniana

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}),$$

quali sono le condizioni perché sia invariante per traslazioni generiche o per una traslazione specifica di x_0 ?

Sol: È invariante per traslazioni generiche solo se $V = 0$. Fissato x_0 essa può essere invariante per traslazioni di questo valore se $V(x) = V(x + x_0)$ ossia se è una funzione periodica di periodo x_0 . In questo caso, l'Hamiltoniana è invariante per tutte le traslazioni di quantità multiple di x_0 .

Esercizio 2. Se $\mathcal{T}_{x_0}|x\rangle = |x + x_0\rangle$ quanto vale l'elemento di matrice $\langle p' | \mathcal{T}_{x_0} | p \rangle$? come si trasforma l'operatore $\mathbf{xp}$ sotto tale trasformazione? E l'operatore $\mathbf{c} = \mathbf{xp} + \mathbf{px}$?

Sol: Poiché $\mathcal{T}_{x_0} = e^{-i\frac{\mathbf{p}x_0}{\hbar}}$ si ha

$$\mathcal{T}_{x_0} |p\rangle = e^{-i\frac{px_0}{\hbar}} |p\rangle,$$

e quindi

$$\langle p' | \mathcal{T}_{x_0} | p \rangle = e^{-i\frac{px_0}{\hbar}} \langle p' | p \rangle = e^{-i\frac{px_0}{\hbar}} \delta(p - p').$$

Gli operatori in questione si trasformano come

$$\mathcal{T}_{x_0}^\dagger \mathbf{xp} \mathcal{T}_{x_0} = \mathcal{T}_{x_0}^\dagger \mathbf{x} \mathcal{T}_{x_0} \mathbf{p} = (\mathbf{x} + x_0) \mathbf{p} = \mathbf{xp} + x_0 \mathbf{p},$$

$$\mathcal{T}_{x_0}^\dagger \mathbf{px} \mathcal{T}_{x_0} = \mathbf{p} \mathcal{T}_{x_0}^\dagger \mathbf{x} \mathcal{T}_{x_0} = \mathbf{p} (\mathbf{x} + x_0) = \mathbf{px} + x_0 \mathbf{p},$$

$$\mathcal{T}_{x_0}^\dagger \mathbf{c} \mathcal{T}_{x_0} = \mathbf{c} + 2x_0 \mathbf{p}.$$