

Lezione 13/10/2023

0.1 Rappresentazione di Heisenberg

Nella rappresentazione di Heisenberg sono gli operatori e non gli stati ad evolvere. Applicando un operatore su uno stato che evolve si ottiene

$$\mathbf{A}_S |v(t)\rangle_S = \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) |v(0)\rangle_S = |u(t)\rangle_S = \mathbf{U}(t) |u(0)\rangle_S,$$

che, moltiplicando a sinistra per $\mathbf{U}^\dagger(t)$, diventa

$$\mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) |v(0)\rangle = |u(0)\rangle,$$

ossia l'azione dell'operatore in rappresentazione di Heisenberg

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t),$$

avente come input e output i due stati iniziali indipendenti dal tempo (rappresentazione di Heisenberg degli stati)

$$\mathbf{A}_H(t) |v\rangle_H = |u\rangle_H.$$

L'equivalenza di queste due rappresentazioni è evidente anche nel calcolo dei valori medi

$$\langle \mathbf{A}_S \rangle = \langle \psi(t) | \mathbf{A}_S | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S \mathbf{U}(t) | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \mathbf{A}_H(t) | \psi(0) \rangle = \langle \mathbf{A}_H \rangle.$$

Più in generale, gli operatori potrebbero avere una dipendenza parametrica dal tempo anche in rappresentazione di Schroedinger, in questo caso

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \mathbf{U}(t).$$

- L'evoluzione degli operatori è data da

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \dot{\mathbf{U}}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A}_S(t) \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \dot{\mathbf{A}}_S(t) \mathbf{U}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} \mathbf{U}^\dagger(t) [\mathbf{H}(t), \mathbf{A}_S(t)] \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}^\dagger(t) \dot{\mathbf{A}}_S(t) \mathbf{U}(t)$$

- Nel caso in cui $\mathbf{A}_S$ e $\mathbf{H}$ sono indipendenti dal tempo si ottiene

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{A}_H(t)].$$

- Notare che se

$$[\mathbf{H}, \mathbf{A}_S] = 0,$$

allora

$$\mathbf{A}_H(t) = \mathbf{A}_S,$$

ossia $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_H$ è una quantità conservata.

- Data un'Hamiltoniana di singola particella in un potenziale si ha

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}(\mathbf{x}),$$

$$[\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}^2, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] = -i \frac{\hbar}{m} \mathbf{p},$$

per calcolare

$$[\mathbf{H}, \mathbf{p}] = [\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{p}],$$

possiamo sviluppare in serie di potenze il potenziale

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \sum_n v_n \mathbf{x}^n,$$

e notare che il commutatore fra l'impulso e una potenza intera della posizione è

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}^n, \mathbf{p}] &= \mathbf{x} [\mathbf{x}^{n-1}, \mathbf{p}] + [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-1} = \\ &= \mathbf{x}^2 [\mathbf{x}^{n-2}, \mathbf{p}] + \mathbf{x} [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-2} + [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \mathbf{x}^{n-1} = \\ &= \dots = n \mathbf{x}^{n-1} i \hbar \end{aligned}$$

per cui

$$[\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{p}] = i\hbar \mathbf{V}'(\mathbf{x}).$$

Si ricavano quindi le equazioni del moto per gli operatori in rappresentazione di Heisenberg classiche

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -\mathbf{V}'(\mathbf{x}).$$

Per i valori medi vale il **Teorema di Ehrenfest**

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = - \left\langle \frac{dV}{dx}(\mathbf{x}) \right\rangle$$

Esercizio 1. Studiare per una particella libera 1D le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi.

Sol: Dall'Hamiltoniana

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

si ricavano le equazioni del moto

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = 0,$$

la cui soluzione è

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{p},$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \frac{\mathbf{p}}{m}t.$$

Per quanto riguarda i valori medi

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m},$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}(0) \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) \rangle + \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}t.$$

Esercizio 2. Studiare per una particella 1D sottoposta a una forza costante le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi.

Sol: Una forza costante F corrisponde a un'energia potenziale $V(\mathbf{x}) = -F\mathbf{x}$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - F\mathbf{x},$$

da cui si ricava

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = F\mathbf{I},$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{I}Ft,$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \frac{\mathbf{p}(0)}{m}t + \mathbf{I}\frac{F}{2m}t^2.$$

Valori medi:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}, \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle &= +F, \\ \langle \mathbf{p}(t) \rangle &= \langle \mathbf{p}(0) \rangle + Ft, \\ \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}(0) \rangle + \frac{\langle \mathbf{p}(0) \rangle}{m}t + \frac{F}{2m}t^2.\end{aligned}$$

Esercizio 3. Studiare per una particella 1D sottoposta a una forza elastica le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi.

Sol: Energia potenziale elastica: $V(\mathbf{x}) = \frac{k}{2}\mathbf{x}^2$.

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\mathbf{x}^2, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -k\mathbf{x}.\end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione del moto è il moto armonico con frequenza $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(0) \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \mathbf{p}(0) \sin \omega t, \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) \cos \omega t - \omega m \mathbf{x}(0) \sin \omega t,\end{aligned}$$

Valori medi:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}, \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle &= -k \langle \mathbf{x} \rangle, \\ \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}(0) \rangle \cos \omega t + \frac{\langle \mathbf{p}(0) \rangle}{m\omega} \sin \omega t, \\ \langle \mathbf{p}(t) \rangle &= \langle \mathbf{p}(0) \rangle \cos \omega t - m\omega \langle \mathbf{x}(0) \rangle \sin \omega t.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Studiare per una particella 1D con un'energia potenziale $V \propto \mathbf{x}^4$ le equazioni del moto degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e dei relativi valori medi. Confrontare con l'analogo caso classico.

Sol:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \gamma \mathbf{x}^4, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \frac{\mathbf{p}}{m}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -3\gamma \mathbf{x}^3.\end{aligned}$$

Valori medi:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}, \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle &= -3\gamma \langle \mathbf{x}^3 \rangle.\end{aligned}$$

Notare che in questo caso, le equazioni per i valori medi differiscono dal caso classico perché $\langle \mathbf{x}^3 \rangle \neq \langle \mathbf{x} \rangle^3$.

Esercizio 5. Scrivere la funzione d'onda più generale $\psi(x) = |\psi(x)| e^{i\theta(x)}$ tale che

$$|\psi(x)| = \begin{cases} \text{cost} & \text{per } -a < x < a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

e per la quale valga $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$, calcolare la varianza di $\mathbf{x}$. Scrivere la funzione d'onda nello spazio degli impulsi nel caso generale e nel caso in cui $\theta(x) = 0$ e calcolare la varianza di $\mathbf{p}$ in quest'ultimo caso.

Sol: Normalizzazione

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int dx |\psi(x)|^2 = 2a \text{cost}^2 = 1 \Rightarrow \text{cost} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{x} | \psi \rangle &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx x = 0, \\ \langle \psi | \mathbf{x}^2 | \psi \rangle &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx x^2 = \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

Valor medio dell'impulso

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle &= \int dx \langle \psi | x \rangle \langle x | \mathbf{p} | \psi \rangle = \\ &= -i\hbar \int dx |\psi(x)| e^{-i\theta(x)} \left(\delta(x+a) - \delta(x-a) + i |\psi(x)| \frac{d}{dx} \theta(x) \right) e^{i\theta(x)} = \\ &= -i\hbar \int dx |\psi(x)| \left(\delta(x+a) - \delta(x-a) + i |\psi(x)| \frac{d}{dx} \theta(x) \right) = \\ &= -i\hbar \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2a}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2a}} + \frac{i}{2a} \int_{-a}^a dx \frac{d}{dx} \theta(x) \right) = \\ &= \frac{\hbar}{2a} (\theta(a) - \theta(-a)) = 0 \end{aligned}$$

La condizione è quindi che $\theta(a) = \theta(-a)$. Nella rappresentazione degli autostati dell'impulso

$$\begin{aligned} \langle p | \psi \rangle &= \int dx \langle p | x \rangle \langle x | \psi \rangle = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a\pi\hbar}} \int_{-a}^a dx e^{-i\frac{px}{\hbar}} e^{i\theta(x)}. \end{aligned}$$

Se $\theta(x) = 0$

$$\begin{aligned} \langle p | \psi \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{a\pi\hbar}} \int_{-a}^a dx e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \\ &= \frac{i\sqrt{\hbar}}{2p\sqrt{a\pi}} \left(e^{-i\frac{pa}{\hbar}} - e^{i\frac{pa}{\hbar}} \right) = \sqrt{\frac{\hbar}{a\pi}} \frac{\sin \frac{pa}{\hbar}}{p}. \end{aligned}$$

Varianza di $\mathbf{p}$

$$\langle \psi | \mathbf{p}^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar}{a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sin^2 \frac{pa}{\hbar} = \infty.$$

Esercizio 6. Sia $|\psi\rangle$ uno stato di singola particella corrispondente alla funzione d'onda

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = \frac{N}{\sqrt{1+x^2}},$$

1. Calcolare la normalizzazione N
2. Calcolare il valor medio su questo stato di $\mathbf{x}$ e di $\mathbf{x}^2$

Sol:

1. Normalizzazione

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = |N|^2 \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = |N|^2 \pi,$$

quindi

$$N = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\phi}.$$

2. Valori medi

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x}{1+x^2} = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{1+x^2} = \infty.$$

Esercizio 7. Pacchetto gaussiano. Data una distribuzione di probabilità gaussiana per la posizione di una particella quantistica

$$g(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}},$$

la più generica funzione d'onda ad essa associata è

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = e^{i\varphi(x)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = e^{i\varphi(x)} \sqrt{g(x)},$$

dove $\varphi(x)$ è una qualsiasi funzione di x . Tale fase non contribuisce al calcolo dei valori medi di tutte le funzioni di $\mathbf{x}$ infatti i valori medi

$$\langle \mathbf{x}^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 x^m,$$

non sono altro che i momenti della $g(x)$. In particolare

$$\langle \mathbf{x} \rangle = x_0,$$

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle^2 = \sigma^2.$$

La fase $\varphi(x)$ invece appare nel calcolo dei valori medi delle funzioni di $\mathbf{p}$, vediamo ad esempio

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} \rangle &= \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \langle \psi | x \rangle \langle x | \mathbf{p} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \psi^*(x) \left(-i\hbar \delta(x-x') \frac{d}{dx'} \right) \psi(x') = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{d}{dx} \psi(x) = \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\varphi(x)} \sqrt{g(x)} \left(i\varphi'(x) e^{i\varphi(x)} \sqrt{g(x)} - e^{i\varphi(x)} \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \right) = \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x). \end{aligned}$$

- Nel caso in cui $\varphi = \text{const}$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = 0.$$

- Nel caso in cui $\varphi = kx$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \hbar k.$$

Il calcolo delle medie delle potenze di $\mathbf{p}$ si può eseguire in maniera analoga

$$\langle \mathbf{p}^n \rangle = (-i\hbar)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{d^n}{dx^n} \psi(x).$$

Può essere utile esprimere lo stato nella base degli impulsi eseguendo una trasformata di Fourier della funzione d'onda

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \langle p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p | x \rangle \langle x | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{xp}{\hbar}} \psi(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(\frac{xp}{\hbar} - \varphi(x))} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $\varphi(x) = kx$ si ha

$$\begin{aligned}\phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{x}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\frac{(s+x_0)}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{s^2}{4\sigma^2}} \\ &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} e^{-i\frac{x_0}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}},\end{aligned}$$

corrispondente anch'essa ad una distribuzione di probabilità gaussiana

$$|\phi(p)|^2 = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi\hbar}} e^{-\frac{2\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}}.$$

In questa rappresentazione si possono facilmente calcolare i valori medi delle potenze di $\mathbf{p}$ come i momenti della distribuzione

$$\langle \mathbf{p}^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp p^n |\phi(p)|^2,$$

per cui troviamo di nuovo

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \hbar k.$$

Si ricava immediatamente la varianza di $\mathbf{p}$ che è

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle - \langle \mathbf{p} \rangle^2 = \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2},$$

e da questa possiamo verificare la **relazione di indeterminazione** per posizione/quantità di moto

$$\sigma\sigma_p = \frac{\hbar}{2}.$$