

Lezione 19/10/2023

Esercizio 1. Pacchetto gaussiano. Data una distribuzione di probabilità gaussiana per la posizione di una particella quantistica

$$g(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}},$$

la più generica funzione d'onda a essa associata è

$$\psi(x) = \langle x|\psi \rangle = e^{i\varphi(x)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = e^{i\varphi(x)} \sqrt{g(x)},$$

dove $\varphi(x)$ è una qualsiasi funzione di x . Tale fase non contribuisce al calcolo dei valori medi di tutte le funzioni di $\mathbf{x}$ infatti i valori medi

$$\langle \mathbf{x}^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 x^m,$$

non sono altro che i momenti della $g(x)$. In particolare

$$\langle \mathbf{x} \rangle = x_0,$$

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle^2 = \sigma^2.$$

La fase $\varphi(x)$ invece appare nel calcolo dei valori medi delle funzioni di $\mathbf{p}$, vediamo ad esempio

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} \rangle &= \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \langle \psi | x \rangle \langle x | \mathbf{p} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \psi^*(x) \left(-i\hbar \delta(x-x') \frac{d}{dx'} \right) \psi(x') = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{d}{dx} \psi(x) = \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\varphi(x)} \sqrt{g(x)} \left(i\varphi'(x) e^{i\varphi(x)} \sqrt{g(x)} - e^{i\varphi(x)} \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \right) = \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x). \end{aligned}$$

- Nel caso in cui $\varphi = \text{const}$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = 0.$$

- Nel caso in cui $\varphi = kx$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \hbar k.$$

Il calcolo delle medie delle potenze di $\mathbf{p}$ si può eseguire in maniera analoga

$$\langle \mathbf{p}^n \rangle = (-i\hbar)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{d^n}{dx^n} \psi(x).$$

Può essere utile esprimere lo stato nella base degli impulsi eseguendo una trasformata di Fourier della funzione d'onda

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \langle p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p | x \rangle \langle x | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{xp}{\hbar}} \psi(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(\frac{xp}{\hbar} - \varphi(x))} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $\varphi(x) = kx$ si ha

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{x}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\frac{(s+x_0)}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{s^2}{4\sigma^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{-i\frac{x_0}{\hbar}(p-\hbar k)} e^{-\frac{\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}}, \end{aligned}$$

corrispondente anch'essa ad una distribuzione di probabilità gaussiana

$$|\phi(p)|^2 = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\hbar} e^{-\frac{2\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}}.$$

In questa rappresentazione si possono facilmente calcolare i valori medi delle potenze di $\mathbf{p}$ come i momenti della distribuzione

$$\langle \mathbf{p}^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp p^n |\phi(p)|^2,$$

per cui troviamo di nuovo

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \hbar k.$$

Si ricava immediatamente la varianza di $\mathbf{p}$ che è

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle - \langle \mathbf{p} \rangle^2 = \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2},$$

e da questa possiamo verificare la **relazione di indeterminazione** per posizione/quantità di moto

$$\sigma\sigma_p = \frac{\hbar}{2}.$$

Esercizio 2. Evoluzione del pacchetto gaussiano. Data la funzione d'onda di una particella libera

$$\psi(x) = \langle x|\psi \rangle = e^{ikx} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} = e^{ikx} \sqrt{g(x)},$$

studiarne l'evoluzione temporale.

Sol: Ricordiamo che nello spazio degli impulsi la funzione d'onda è

$$\phi(p) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}},$$

tramite essa possiamo esprimere l'evoluzione temporale

$$\begin{aligned} \langle x|e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m\hbar}t}|\psi \rangle &= \int dp \langle x|e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m\hbar}t}|p \rangle \langle p|\psi \rangle = \\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \int dp e^{i\frac{px}{\hbar}} e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}t} e^{-\frac{\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{imx^2-2k(\hbar kt-2mx)\sigma^2}{2\hbar t-4im\sigma^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{(imx^2-2k(\hbar kt-2mx)\sigma^2)(2\hbar t+4im\sigma^2)}{4\hbar^2 t^2+16m^2\sigma^4}} = \\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\alpha(t)} e^{-\frac{x^2+\frac{k\hbar t}{m^2}(\hbar kt-2mx)}{4\left(\sigma^2+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma^2}\right)}} \\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\hbar} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\alpha(t)} e^{-\frac{\left(x-\frac{k\hbar t}{m}\right)^2}{4\left(\sigma^2+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma^2}\right)}} \end{aligned}$$

Il pacchetto rimane gaussiano, il suo picco si sposta con velocità $v = \frac{k\hbar}{m}$ e la varianza aumenta con il quadrato del tempo.

Esercizio 3. Studiare l'evoluzione del pacchetto gaussiano per una particella libera in rappresentazione di Heisenberg. In particolare calcolare, $\langle \mathbf{x}_H(t) \rangle$, $\langle \mathbf{p}_H(t) \rangle$, $\langle \Delta^2 \mathbf{x}_H(t) \rangle$, $\langle \Delta^2 \mathbf{p}_H(t) \rangle$ e $\langle \mathbf{T}_H(t) \rangle$. Considerare il caso in cui la fase del pacchetto è $\varphi(x) = kx$ (caso balistico).

Sol: Per una particella libera

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

e l'evoluzione degli operatori posizione e quantità di moto è

$$\dot{\mathbf{p}}_H = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}_H] = 0,$$

$$\dot{\mathbf{x}}_H = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{x}_H] = \frac{i}{\hbar 2m} [\mathbf{p}_H^2, \mathbf{x}_H] = \frac{\mathbf{p}_H}{m},$$

con condizioni iniziali

$$\mathbf{p}_H(0) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x}_H(0) = \mathbf{x}.$$

La soluzione è quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_H(t) &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{x}_H(t) &= \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{m}t. \end{aligned}$$

Se inizialmente la funzione d'onda è un pacchetto gaussiano

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = e^{i\varphi(x)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} = e^{i\varphi(x)} \sqrt{g(x)},$$

la quantità di moto media è

$$\langle \mathbf{p}_H \rangle = \langle \psi | \mathbf{p}_H(t) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x),$$

ossia rimane costante nel tempo, come ci si aspetta. Se $\varphi(x) = kx$ allora $\langle \mathbf{p}_H \rangle = \hbar k$. Il quadrato della quantità di moto è anch'esso una quantità conservata e (vedi esercizio sul pacchetto gaussiano)

$$\langle \mathbf{p}_H^2 \rangle = \langle \mathbf{p}^2 \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle^2 + \sigma_p^2 = \hbar^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2},$$

e la varianza non cambia nel tempo. Se $\varphi(x) = kx$ allora $\langle \mathbf{p}_H^2 \rangle = \hbar^2 k^2 + \sigma_p^2$. La posizione media è

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_H \rangle &= \langle \psi | \mathbf{x}_H(t) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{x} | \psi \rangle + \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle \frac{t}{m} = \\ &= x_0 + \frac{t}{m} \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x), \end{aligned}$$

se $\varphi(x) = kx$ si sposta linearmente nel tempo

$$\langle \mathbf{x}_H(t) \rangle = x_0 + \frac{\hbar k}{m}t.$$

Per studiare le fluttuazioni utilizziamo

$$\mathbf{x}_H^2(t) = \mathbf{x}^2 + \frac{\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{p}}{m}t + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}t^2 = \mathbf{x}^2 + \frac{2\mathbf{x}\mathbf{p} + i\hbar}{m}t + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}t^2.$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{x}\mathbf{p} | \psi \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \psi^*(x) \psi'(x) = \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) - i\frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x g'(x) = \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) - i\frac{\hbar}{2} [xg(x)]_{-\infty}^{\infty} + i\frac{\hbar}{2} = \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) + i\frac{\hbar}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_H^2(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}^2 \rangle + \frac{2\langle \mathbf{x}\mathbf{p} \rangle + i\hbar}{m}t + \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{m^2}t^2 = \\ &= \sigma^2 + x_0^2 + \frac{2\hbar t}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \varphi'(x) g(x) + \frac{\hbar^2}{m}t^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2}t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \Delta^2 \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}_H^2(t) \rangle - \langle \mathbf{x}_H(t) \rangle^2 = \\ &= \sigma^2 + \frac{2\hbar t}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - x_0) \varphi'(x) g(x) + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2} t^2.\end{aligned}$$

Se $\varphi(x) = kx$

$$\langle \Delta^2 \mathbf{x}(t) \rangle = \sigma^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2 m^2} t^2.$$

L'energia cinetica media è

$$\langle \mathbf{T}_H(t) \rangle = \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \varphi'(x) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{8\sigma^2 m^2},$$

se $\varphi(x) = kx$

$$\langle \mathbf{T} \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{8\sigma^2 m^2},$$

notare che essa è diversa da zero anche se $k = 0$ (fluttuazioni quantistiche). La densità di probabilità della quantità di moto è (vedi esercizio sul pacchetto gaussiano) è

$$\rho(p) = |\phi(p)|^2 = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\hbar} e^{-\frac{2\sigma^2(p-\hbar k)^2}{\hbar^2}},$$

gli autovalori dell'Hamiltoniana (le energie del sistema) sono

$$E(p) = \frac{p^2}{2m},$$

per cui la densità di probabilità dell'energia è

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \frac{\delta\left(p - \sqrt{2mE}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} + \int_{-\infty}^{\infty} dp \rho(p) \frac{\delta\left(p + \sqrt{2mE}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{\pi}} \frac{\sigma}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} \left(e^{-\frac{2\sigma^2(\sqrt{2mE}-\hbar k)^2}{\hbar^2}} + e^{-\frac{2\sigma^2(\sqrt{2mE}+\hbar k)^2}{\hbar^2}} \right) = 2\sqrt{\frac{m}{\pi}} \frac{\sigma}{\hbar} e^{-2\sigma^2 k^2} e^{-\frac{4\sigma^2 m E}{\hbar^2}} \frac{\cosh \frac{4\sigma^2 k \sqrt{2mE}}{\hbar}}{\sqrt{E}} = \\ &= \frac{m}{\sigma_p^2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2\sigma_p^2}} e^{-\frac{mE}{\sigma_p^2}} \frac{\cosh \frac{\hbar k \sqrt{2mE}}{\sigma_p^2}}{\frac{\sqrt{mE}}{\sigma_p}}\end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ un operatore osservabile con una base completa di autostati $|\phi_n\rangle$ con autovalori a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Uno stato generico normalizzato è dato da

$$|\psi\rangle = N(3|\psi_1\rangle - 4i|\psi_2\rangle),$$

con $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ ortonormali. Trovare N e la probabilità P_4 che una misura di $\mathbf{A}$ dia a_4 , prima nel caso in cui esso non è degenere e poi nel caso degenere. Esplicitare questi calcoli per il caso $|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle$.

Sol: La condizione di normalizzazione è

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 = |N|^2 25 \Rightarrow |N| = \frac{1}{5},$$

quindi $N = 5e^{i\phi}$ con ϕ arbitrario. La probabilità P_4 per a_4 non degenere è

$$P_4 = \frac{1}{25} |3\langle \phi_4 | \psi_1 \rangle - 4i\langle \phi_4 | \psi_2 \rangle|^2,$$

se $|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle$ allora $P_4 = 0$. Nel caso in cui a_4 sia degenere, siano $\{|\phi_l\rangle\}$ gli autostati ad esso corrispondenti, allora

$$P_4 = \frac{1}{25} \sum_l |3\langle \phi_l | \psi_1 \rangle - 4i\langle \phi_l | \psi_2 \rangle|^2,$$

se $|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle$ abbiamo quattro possibilità

1. Se $1, 2 \notin \{l\}$ abbiamo ancora $P_4 = 0$
2. Se solo $1 \in \{l\}$ allora $P_4 = \frac{9}{25}$
3. Se solo $2 \in \{l\}$ allora $P_4 = \frac{16}{25}$
4. Se $1, 2 \in \{l\}$ allora $P_4 = 1$