

Lezione 27/10/2023

Esercizio 1. Su di uno stato la misura di una quantità $\mathbf{A}$ dà sempre lo stesso valore a . Sullo stesso stato invece la misura della quantità $\mathbf{B}$, che è compatibile con $\mathbf{A}$, dà il valore b_1 o b_2 in maniera equiprobabile.

1. Lo stato in esame è autostato di $\mathbf{A}$?
2. Lo stato in esame è autostato di $\mathbf{B}$?
3. Come si può esprimere tale stato?

Sol: Sia $|\psi\rangle$ lo stato in esame. Esso è sicuramente un autostato di $\mathbf{A}$ con autovalore a

$$\mathbf{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle,$$

mentre non è autostato di $\mathbf{B}$. Dal momento che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono compatibili, l'autovalore a deve essere necessariamente degenere, ossia deve esistere uno spazio Ω_a generato da una base ortonormale $\{|a_n\rangle\}$ tale che ogni suo elemento è autostato di $\mathbf{A}$ con autovalore a . Quindi

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n_a} c_k |a_k\rangle,$$

dove n_a è la molteplicità di a . Non abbiamo invece elementi per dire se gli autovalori b_1 e b_2 sono degeneri. Chiamiamo Ω_{b_1} e Ω_{b_2} i due autospazi, di dimensioni n_{b_1} e n_{b_2} , corrispondenti agli autovalori b_1 e b_2

$$\mathbf{B}|\nu\rangle = b_1|\nu\rangle, \forall |\nu\rangle \in \Omega_{b_1},$$

$$\mathbf{B}|\mu\rangle = b_2|\mu\rangle, \forall |\mu\rangle \in \Omega_{b_2}.$$

In ciascuna delle intersezioni $\Omega_a \cap \Omega_{b_1}$ e $\Omega_a \cap \Omega_{b_2}$ è possibile trovare almeno un vettore che è autostato simultaneo di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ $|\bar{\nu}\rangle \in \Omega_a \cap \Omega_{b_1}$, $|\bar{\mu}\rangle \in \Omega_a \cap \Omega_{b_2}$. Con questa scelta ovviamente si ha

$$\mathbf{A}|\bar{\nu}\rangle = a|\bar{\nu}\rangle,$$

$$\mathbf{A}|\bar{\mu}\rangle = a|\bar{\mu}\rangle.$$

Lo stato ha quindi la forma

$$|\psi\rangle = \frac{|\bar{\nu}\rangle + e^{i\phi}|\bar{\mu}\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2. Date le due osservabili

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

1. Dire se sono compatibili.
2. Quali sono i possibili risultati di una misura di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$?
3. Trovare, se esiste una base di autovettori comuni alle due osservabili.

Sol: Possiamo scrivere

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_1 \oplus \sigma_1,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}_1 \oplus \left(\sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_1 \right).$$

1. Le due osservabili sono compatibili perché $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{0}$.
2. Per $\mathbf{A}$ i risultati possibili sono

$$\alpha_1 = 1, |\alpha_1^{(1)}\rangle = \frac{|1\rangle + b(|2\rangle + |3\rangle)}{\sqrt{1 + 2|b|^2}}, |\alpha_1^{(2)}\rangle = \frac{2b^*|1\rangle - (|2\rangle + |3\rangle)}{\sqrt{2 + 4|b|^2}},$$

$$\alpha_2 = -1, |\alpha_2\rangle = \frac{|2\rangle - |3\rangle}{\sqrt{2}},$$

per $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 1, \quad |\beta_1\rangle = |1\rangle, \\ \beta_2 &= \frac{3}{2}, \quad |\beta_2\rangle = \frac{|2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \beta_3 &= \frac{1}{2}, \quad |\beta_3\rangle = \frac{|2\rangle - |3\rangle}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Tutti gli autostati di $\mathbf{B}$ sono autostati comuni.

Esercizio 3. Consideriamo uno stato quantistico con due stati con Hamiltoniana, nella base $|1\rangle, |2\rangle$, data dalla matrice

$$\mathbf{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare gli autostati di $\mathbf{H}$.
2. Determinare l'operatore di evoluzione temporale $e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathbf{H}t}$.
3. Dato lo stato iniziale $|\psi(0) = |1\rangle\rangle$ e l'osservabile

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolare la probabilità, al tempo $t > 0$ generico, che una misura di $\mathbf{O}$ dia come risultato 2.

Sol:

1. L'Hamiltoniana è

$$\mathbf{H} = \hbar\omega_0\sigma_1,$$

quindi ha autovalori $E_{\pm} = \pm\hbar\omega_0$ e autovettori

$$|\pm\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

2. L'operatore di evoluzione è

$$e^{-i\frac{\mathbf{H}t}{\hbar}} = \mathbf{I} \cos \omega_0 t - i\sigma_1 \sin \omega_0 t.$$

3. L'evoluzione dello stato iniziale è

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\mathbf{H}t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = \cos \omega_0 t |1\rangle - i \sin \omega_0 t |2\rangle.$$

L'osservabile $\mathbf{O}$ è diagonale nella base canonica, per cui la probabilità di ottenere 2 è

$$p_2 = \sin^2 \omega_0 t.$$

Esercizio 4. Un oscillatore armonico di frequenza ω si trova in uno stato in cui una misura di energia può fornire solo i valori E_0 (stato fondamentale) ed E_1 (primo stato eccitato) in maniera equiprobabile. Inoltre il valor medio dell'impulso al tempo $t = 0$ è

$$\langle \mathbf{p}(0) \rangle = \frac{\hbar}{\ell\sqrt{2}}$$

dove ℓ è la lunghezza fondamentale dell'oscillatore armonico.

1. Determinare l'insieme di stati che soddisfino tali condizioni.
2. Il sistema evolve fino al tempo t^* per cui $\langle \mathbf{x}(t^*) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) \rangle$. A questo tempo si esegue una misura di energia, determinare con che probabilità si ottiene il valore $\frac{3}{2}\hbar\omega$.
3. Determinare l'evoluzione temporale del sistema dopo la misura.

Sol: Lo stato ha la forma

$$|\psi(0)\rangle = e^{i\varphi} \left(\frac{|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle}{\sqrt{2}} \right).$$

Sfruttiamo la condizione ulteriore data

$$\langle \mathbf{p}(0) \rangle = \langle \psi(0) | i \frac{\hbar}{\ell\sqrt{2}} (\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}) | \psi(0) \rangle = i \frac{\hbar}{\ell 2\sqrt{2}} (e^{-i\phi} - e^{i\phi}) = \frac{\hbar}{\ell\sqrt{2}},$$

quindi

$$\sin \phi = 1,$$

condizione che si verifica soltanto se $\phi = \frac{\pi}{2}$, ossia

$$|\psi(0)\rangle = e^{i\varphi} \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Al tempo iniziale

$$\langle \mathbf{x}(0) \rangle = \langle \psi(0) | \frac{\ell}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}) | \psi(0) \rangle = \frac{\ell}{2\sqrt{2}} (i - i) = 0.$$

L'evoluzione temporale dello stato è

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\varphi} \frac{e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} |0\rangle + i e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} |1\rangle}{\sqrt{2}} = e^{i(\varphi + \frac{\omega}{2}t)} \frac{|0\rangle + i e^{-i\omega t} |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \psi(t) | \frac{\ell}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}) | \psi(t) \rangle = \frac{\ell}{2\sqrt{2}} (i e^{-i\omega t} - i e^{i\omega t}) = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \sin \omega t.$$

Tale valor medio si annulla di nuovo per $t^* = \frac{\pi}{\omega}$ ed in questo istante lo stato è

$$|\psi(t^*)\rangle = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

La probabilità di misurare l'energia E_1 è

$$p(E_1) = \frac{1}{2}.$$

Dopo la misura lo stato evolve soltanto per un fattore di fase globale

$$|\psi(t > t^*)\rangle \propto e^{-i\frac{3}{2}\omega t} |1\rangle.$$

Esercizio 5. Date le due osservabili

$$\mathbf{A} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se sono compatibili
2. Trovarne autovalori e autovettori

$$\mathbf{A} |A_{\pm}\rangle = a_{\pm} |A_{\pm}\rangle$$

$$\mathbf{B} |B_{\pm}\rangle = b_{\pm} |B_{\pm}\rangle$$

3. Partendo dallo stato iniziale

$$|\psi_1\rangle = |A+\rangle,$$

viene misurato $\mathbf{A}$, che risultato si ottiene? Qual è lo stato dopo la misura?

4. Successivamente viene misurato $\mathbf{B}$. Che risultati e con quale probabilità si possono ottenere? Supponendo di aver ottenuto il risultato b_+ , si misura nuovamente $\mathbf{A}$. Quali sono i possibili risultati e con quale probabilità si ottengono?

5. A partire dallo stato

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} |A+\rangle + |A-\rangle \right)$$

calcolare:

$$\langle \mathbf{A} \rangle, \langle \Delta \mathbf{A}^2 \rangle, \langle \mathbf{B} \rangle, \langle \Delta \mathbf{B}^2 \rangle.$$

6. Sempre a partire da $|\psi_2\rangle$, si effettuano, una di seguito all'altra, le misure di $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e di nuovo $\mathbf{A}$. Qual è la probabilità di ottenere come risultato finale a_+ ?

Sol: In termini di matrici di Pauli

$$\mathbf{A} = \hbar\sigma_z, \quad \mathbf{B} = \hbar\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}.$$

1. Le grandezze non sono compatibili infatti

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} [\sigma_z, \sigma_x] = i\frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} \sigma_y \neq 0.$$

2. Entrambe le matrici hanno autovalori $a_{\pm} = b_{\pm} = \pm\hbar$. La matrice $\mathbf{A}$ è già diagonale quindi utilizziamo $|A\pm\rangle$ come base canonica. Gli autostati di $\mathbf{B}$ sono

$$|B+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[(1+\sqrt{2}) |A+\rangle + |A-\rangle \right]$$

$$|B-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[|A+\rangle - (1+\sqrt{2}) |A-\rangle \right].$$

Invertendo

$$|A+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[(1+\sqrt{2}) |B+\rangle + |B-\rangle \right]$$

$$|A-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[|B+\rangle - (1+\sqrt{2}) |B-\rangle \right].$$

3. Una misura di $\mathbf{A}$ sullo stato $|\psi_1\rangle$ dà come risultato a_+ con probabilità 1. La misura non cambia lo stato.
4. La misura successiva di $\mathbf{B}$ dà $b_{\pm}$ con probabilità

$$P(b_+) = p = \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}, \quad P(b_-) = q = 1-p = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}.$$

Supponendo che il risultato della misura sia b_+ il sistema si proietta nello stato

$$|B+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[(1+\sqrt{2}) |A+\rangle + |A-\rangle \right],$$

quindi una misura di $\mathbf{A}$ dà come risultato a_+ con probabilità $p_+ = p$ e a_- con probabilità $p_- = q$.

5. Medie

$$\langle\psi_2|\mathbf{A}|\psi_2\rangle = \frac{\hbar}{3},$$

$$\langle\psi_2|\mathbf{A}^2|\psi_2\rangle = \hbar^2,$$

$$\langle\psi_2|\Delta\mathbf{A}^2|\psi_2\rangle = \frac{8\hbar^2}{9}.$$

$$\langle\psi_2|\mathbf{B}|\psi_2\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{6}} \langle\psi_2| \left[(1+\sqrt{2}) |A+\rangle - (1-\sqrt{2}) |A-\rangle \right] \rangle = \hbar \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \hbar \frac{\sqrt{2}+4}{6},$$

$$\langle\psi_2|\mathbf{B}^2|\psi_2\rangle = \hbar^2,$$

$$\langle\psi_2|\Delta\mathbf{B}^2|\psi_2\rangle = \frac{\hbar^2(9-4\sqrt{2})}{18}.$$

6. A seguito della prima misura i possibili risultati hanno probabilità

$$P_1(a_+) = \frac{2}{3}, \quad P_1(a_-) = \frac{1}{3},$$

con possibili stati finali

$$|A+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[(1+\sqrt{2}) |B+\rangle + |B-\rangle \right]$$

$$|A-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left[|B+\rangle - (1+\sqrt{2}) |B-\rangle \right].$$

Le probabilità dei possibili risultati della seconda misura sono

$$P(b_+|A+) = p = \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}, \quad P(b_+|A-) = q = \frac{1}{4+2\sqrt{2}},$$

$$P(b_-|A+) = q, \quad P(b_-|A-) = p,$$

$$P_2(b_+) = P(b_+|A+) P_1(a_+) + P(b_+|A-) P_1(a_-) = \frac{2p+q}{3},$$

$$P_2(b_-) = P(b_-|A+) P_1(a_+) + P(b_-|A-) P_1(a_-) = \frac{2q+p}{3},$$

Dopo la terza misura si ottiene a_+ o a_- con probabilità totale

$$P(a_+|B+) = p, \quad P(a_+|B-) = q, \quad P(a_-|B+) = q, \quad P(a_-|B-) = p,$$

$$\begin{aligned} P_3(a_+) &= P(a_+|B+) P_2(b_+) + P(a_+|B-) P_2(b_-) = \\ &= p \frac{2p+q}{3} + q \frac{2q+p}{3} = \frac{2(p^2 + pq + q^2)}{3} = \frac{p^2 + q^2 + 1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(a_-) &= P(a_-|B+) P_2(b_+) + P(a_-|B-) P_2(b_-) = \\ &= q \frac{2p+q}{3} + p \frac{2q+p}{3} = \frac{4pq + q^2 + p^2}{3} = \frac{2pq + 1}{3} \end{aligned}$$