

Lezione 02/11/2023

Esercizio 1. La probabilità di trovare una particella in una dimensione nell'intervallo $[-a/2, a/2]$ è costante, mentre la probabilità di trovare tale particella in qualsiasi punto all'esterno di tale intervallo è nulla. La corrente associata alla particella è nulla. Quale è la densità di probabilità di trovare la particella con impulso p ?

Sol: La funzione d'onda ha la forma

$$\psi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)},$$

con

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} & |x| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

La corrente è

$$j(x) = \frac{\hbar}{m} \Im \left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} \right] = \frac{\hbar}{m} \Im [\rho(\rho' + i\theta'\rho)] = \frac{\hbar}{m} \theta' \rho^2 = 0,$$

quindi

$$\theta(x) = \text{cost} = \alpha.$$

Nella rappresentazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2\pi\hbar a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \\ &= e^{i\alpha} \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi a}} \frac{\sin \frac{ap}{2\hbar}}{p}, \end{aligned}$$

quindi

$$|\phi(p)|^2 = \frac{2\hbar}{\pi a} \frac{\sin^2 \frac{ap}{2\hbar}}{p^2}.$$

Esercizio 2. Se due stati sono ortogonali al tempo $t = 0$ lo saranno anche al tempo $t > 0$? Discutere il risultato.

Sol: L'evoluzione temporale si ottiene applicando allo stato iniziale un'operatore unitario

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t) |\psi(0)\rangle,$$

per cui se due stati sono inizialmente ortogonali

$$\langle \psi_1(0) | \psi_2(0) \rangle = 0,$$

allora lo sono a tutti i tempi

$$\langle \psi_1(t) | \psi_2(t) \rangle = \langle \psi_1(0) | \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{U}(t) | \psi_2(0) \rangle = \langle \psi_1(0) | \mathbf{I} | \psi_2(0) \rangle = \langle \psi_1(0) | \psi_2(0) \rangle = 0.$$

Esercizio 3. L'operatore $\mathbf{U} = \mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{p}$ è Hermitiano? Fornire una stima per il valore minimo del prodotto

$$\sqrt{\langle \Delta \mathbf{U}^2 \rangle \langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle}$$

Sol: L'operatore è Hermitiano. Si ha

$$[\mathbf{U}, \mathbf{x}] = [\mathbf{p}, \mathbf{x}] \mathbf{x} + \mathbf{x} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] = -i\hbar \mathbf{x},$$

quindi

$$\sqrt{\langle \Delta \mathbf{U}^2 \rangle \langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle \mathbf{x} \rangle|.$$

Esercizio 4. Lo stato $\psi(x)$ è pari al tempo $t = 0$. Lo sarà anche al tempo $t > 0$? Discutere in quali casi ciò accade.

Sol: In generale l'evoluzione non mantiene la parità della funzione d'onda tuttavia se l'Hamiltoniana commuta con l'operatore di parità le sue autofunzioni possono essere divise in funzioni pari e dispari

$$\mathbf{H} |\phi_n^p\rangle = E_n^p |\phi_n^p\rangle,$$

$$\mathbf{H} |\phi_n^d\rangle = E_n^d |\phi_n^d\rangle.$$

Lo stato iniziale può essere quindi espanso in una combinazione delle sole autofunzioni pari

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n^p\rangle,$$

e in questo caso esso evolve mantenendo la sua parità

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-i \frac{E_n^p}{\hbar} t} |\phi_n^p\rangle.$$

Esercizio 5. Nella base ortonormale $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ l'operatore $\mathbf{A}$ è rappresentato dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

1. L'operatore è hermitiano?
2. Quali sono i suoi autovalori e autovettori?
3. Dati gli stati iniziali

$$|\psi_a\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |3\rangle,$$

$$|\psi_b\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1\rangle,$$

quali sono nei due casi i possibili risultati di una misura di $\mathbf{A}$ e con quale probabilità. Qual è lo stato finale dopo la misura.

Sol:

1. Sì $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$
2. L'operatore si può scrivere come $\mathbf{A} = \mathbf{I}_1 \oplus \sigma_2$ quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

con autovettori

$$|\alpha_1\rangle = |1\rangle, |\alpha_2\rangle = \frac{|2\rangle + i|3\rangle}{\sqrt{2}}, |\alpha_3\rangle = \frac{|2\rangle - i|3\rangle}{\sqrt{2}}.$$

3. Nella base degli autovettori di $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle &= \sqrt{\frac{2}{6}} (|\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle) - i\sqrt{\frac{1}{6}} (|\alpha_2\rangle - |\alpha_3\rangle) = \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}} \left[(\sqrt{2} - i) |\alpha_2\rangle + (\sqrt{2} + i) |\alpha_3\rangle \right]. \end{aligned}$$

$$P_1 = P_{-1} = \frac{1}{2},$$

$$|\psi_b\rangle = \sqrt{\frac{2}{6}} (|\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle) + \sqrt{\frac{1}{3}} |\alpha_1\rangle,$$

$$P_1 = \frac{2}{3}, P_{-1} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 6. L'Hamiltoniana di un sistema si scrive in termini di operatori di creazione e distruzione come

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{a}^\dagger,$$

con λ_1 e λ_2 complessi.

1. Determinare la condizione su λ_1 e λ_2 per avere $\mathbf{H}$ hermitiano.
2. Determinare lo stato fondamentale del sistema quando λ_1 e λ_2 sono reali.

Sol: Affinché $\mathbf{H}$ sia hermitiano deve essere

$$\mathbf{H}^\dagger = \hbar\omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \lambda_1^* \mathbf{a}^\dagger + \lambda_2^* \mathbf{a} = \mathbf{H},$$

quindi $\lambda_1^* = \lambda_2$. Se i due coefficienti sono reali, essi devono essere uguali. In tale caso

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \lambda (\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{x}^2 + \frac{\sqrt{2}\lambda}{\ell} \mathbf{x} - \frac{\hbar\omega}{2} \mathbf{I},$$

l'hamiltoniana è quella di un oscillatore armonico il cui potenziale non è centrato nell'origine e con un termine costante in più. Possiamo completare il quadrato e riscrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{x}^2 + \frac{\sqrt{2}\lambda}{\ell} \mathbf{x} + \frac{\lambda^2}{\ell^2 m \omega^2} \mathbf{I} - \left(\frac{\lambda^2}{\ell^2 m \omega^2} + \frac{\hbar\omega}{2} \right) \mathbf{I} = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\mathbf{x} - x_0 \mathbf{I})^2 - \left(\frac{\lambda^2}{\ell^2 m \omega^2} + \frac{\hbar\omega}{2} \right) \mathbf{I}, \end{aligned}$$

con

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}\lambda}{\ell m \omega^2}.$$

Definisco la nuova posizione tramite la traslazione

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} - x_0 \mathbf{I},$$

che è una trasformazione canonica

$$[\mathbf{s}, \mathbf{p}] = i\hbar.$$

Nelle nuove variabili

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{s}^2 + c \mathbf{I},$$

con

$$c = -\left(\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} + \frac{\hbar\omega}{2} \right).$$

Definisco i nuovi operatori di creazione e distruzione come

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mathbf{s}}{\ell} + i \frac{\ell}{\hbar} \mathbf{p} \right), \quad \mathbf{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mathbf{s}}{\ell} - i \frac{\ell}{\hbar} \mathbf{p} \right), \\ \mathbf{s} &= \ell \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{p} = i\hbar \frac{\mathbf{b}^\dagger - \mathbf{b}}{\ell\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

per cui

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \frac{1}{2} \right) + c \mathbf{I} = \hbar\omega \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + E_0 \mathbf{I},$$

dove

$$E_0 = -\frac{\lambda^2}{\hbar\omega},$$

è l'energia dello stato fondamentale. Quest'ultimo è lo stato fondamentale $|0\rangle_b$ di $\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}$ e la sua funzione d'onda è

$$\psi_0(s) = \langle s|0\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{\ell\pi^{\frac{1}{4}}}} e^{-\frac{s^2}{2\ell^2}},$$

ossia, nelle variabili originali

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell\pi^{\frac{1}{4}}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\ell^2}}.$$