

Lezione 03/11/2023

Esercizio 1. Una particella di massa m è vincolata su di un segmento unidimensionale di lunghezza L . Al tempo $t = 0$ si trova in uno stato

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\sin \frac{\pi}{L} x + 2e^{i\theta} \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi}{L} x \right)$$

1. Determinare la corrente associata in funzione di θ .
2. Determinare la probabilità di ottenere in una misura l'energia dello stato fondamentale E_1 .
3. Determinare l'evoluzione temporale dello stato.

Sol: La corrente è

$$\begin{aligned} j(x) &= \frac{\hbar}{m} \Im \left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} \right] = \\ &= \frac{\hbar\pi}{L^2 m} \Im \left[\left(\sin \frac{\pi}{L} x + e^{-i\theta} \sin 2 \frac{\pi}{L} x \right) \left(\cos \frac{\pi}{L} x + 2e^{i\theta} \cos 2 \frac{\pi}{L} x \right) \right] = \\ &= \frac{\hbar\pi}{L^2 m} \Im \left[2e^{i\theta} \sin \frac{\pi}{L} x \cos 2 \frac{\pi}{L} x + e^{-i\theta} \sin 2 \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi}{L} x \right] = \\ &= \frac{\hbar\pi}{L^2 m} \sin \theta \left(2 \sin \frac{\pi}{L} x \cos 2 \frac{\pi}{L} x - \sin 2 \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi}{L} x \right) = \\ &= \frac{\hbar\pi}{L^2 m} \sin \theta \left(2 \sin \frac{\pi}{L} x \cos^2 \frac{\pi}{L} x - 2 \sin^3 \frac{\pi}{L} x - 2 \sin \frac{\pi}{L} x \cos^2 \frac{\pi}{L} x \right) = \\ &= -\frac{2\hbar\pi}{L^2 m} \sin \theta \sin^3 \frac{\pi}{L} x. \end{aligned}$$

Lo stato è una combinazione dei primi due autostati

$$|\psi\rangle = \frac{|1\rangle + e^{i\theta} |2\rangle}{\sqrt{2}},$$

quindi

$$P_1 = \frac{1}{2}.$$

Le energie del sistema sono

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2} \frac{n^2}{L^2 m},$$

quindi l'evoluzione dello stato è

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\frac{\pi^2 \hbar^2}{2L^2 m} t} |1\rangle + e^{-i2\frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2 m} t} e^{i\theta} |2\rangle}{\sqrt{2}} \propto \frac{|1\rangle + e^{-i3\frac{\pi^2 \hbar^2}{2L^2 m} t} e^{i\theta} |2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2. Gli operatori A e B sono definiti da

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}^{\dagger 2} + \mathbf{a}^2,$$

$$\mathbf{B} = i(\mathbf{a}^{\dagger 2} - \mathbf{a}^2),$$

con $\mathbf{a}^\dagger$ e $\mathbf{a}$ operatori di creazione e distruzione di un oscillatore armonico.

1. Mostrare che sono hermitiani
2. Stimare su di un generico autostato dell'oscillatore armonico $|n\rangle$ il minimo valore della quantità

$$\sqrt{\langle \Delta \mathbf{A}^2 \rangle \langle \Delta \mathbf{B}^2 \rangle}$$

Sol: La dimostrazione dell'hermiticit     immediata. Per stimare il minimo del prodotto di indeterminazione possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= i \left(-[\mathbf{a}^{\dagger 2}, \mathbf{a}^2] + [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^{\dagger 2}] \right) = 2i [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^{\dagger 2}] = \\
 &= 2i (\mathbf{a} [\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger 2}] + [\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger 2}] \mathbf{a}) = \\
 &= 2i (\mathbf{a} \mathbf{a}^{\dagger} [\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}] + \mathbf{a} [\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}] \mathbf{a}^{\dagger} + \mathbf{a}^{\dagger} [\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}] \mathbf{a} + [\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}] \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a}) = \\
 &= 4i (\mathbf{a} \mathbf{a}^{\dagger} + \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a}) = 4i (1 + 2\mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a})
 \end{aligned}$$

quindi per il principio di indeterminazione

$$\sqrt{\langle \Delta \mathbf{A}^2 \rangle \langle \Delta \mathbf{B}^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} |\langle n | [\mathbf{A}, \mathbf{B}] | n \rangle| = 2(1 + 2n).$$

Esercizio 3. In una buca infinita di potenziale quadrata di ampiezza L una particella si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|1\rangle - i|2\rangle}{\sqrt{2}},$$

determinare l'evoluzione di $\langle \mathbf{p}(t) \rangle$ e confrontarla con l'analoga evoluzione classica avente lo stesso valore iniziale di $\langle \mathbf{x}(0) \rangle$ e $\langle \mathbf{p}(0) \rangle$.

Sol: Valori medi iniziali

$$\langle \mathbf{x}(0) \rangle = \frac{\langle 1|\mathbf{x}|1\rangle + \langle 2|\mathbf{x}|2\rangle - 2\Im \langle 2|\mathbf{x}|1\rangle}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 1|\mathbf{x}|1\rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin^2 \frac{\pi x}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L dx x \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) = \\
 &= \frac{L}{2} - \frac{1}{L} \int_0^L dx x \cos \frac{2\pi x}{L} = \frac{L}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 2|\mathbf{x}|2\rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin^2 \frac{2\pi x}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L dx x \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{L} \right) = \\
 &= \frac{L}{2} - \frac{1}{L} \int_0^L dx x \cos \frac{4\pi x}{L} = \frac{L}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 2|\mathbf{x}|1\rangle &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L dx x \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \cos \frac{3\pi x}{L} \right) = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^L dx \left(\sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} \right) \right] = \\
 &= -\frac{16L}{9\pi^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \Im \langle 2|\mathbf{x}|1\rangle = 0
 \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{x}(0) \rangle = \frac{L}{2}.$$

$$\langle \mathbf{p}(0) \rangle = \frac{\langle 1|\mathbf{p}|1\rangle + \langle 2|\mathbf{p}|2\rangle - 2\Im \langle 2|\mathbf{p}|1\rangle}{2},$$

$$\begin{aligned}
 \langle 1|\mathbf{p}|1\rangle &= -i\hbar \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \frac{\pi x}{L} \frac{d}{dx} \sin \frac{\pi x}{L} = -i\hbar \frac{2\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} = \\
 &= -i\hbar \frac{\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 2|\mathbf{p}|2\rangle &= -i\hbar \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} \frac{d}{dx} \sin \frac{2\pi x}{L} = -i\hbar \frac{4\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} = \\
 &= -i\hbar \frac{2\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{4\pi x}{L} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 2|\mathbf{p}|1\rangle &= -i\hbar \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} \frac{d}{dx} \sin \frac{\pi x}{L} = -i\hbar \frac{2\pi}{L^2} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} = \\
&= -i\hbar \frac{\pi}{L^2} \int_0^L dx \left(\sin \frac{3\pi x}{L} + \sin \frac{\pi x}{L} \right) = -i\hbar \frac{8}{3L},
\end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{p}(0) \rangle = \hbar \frac{8}{3L}.$$

Evoluzione dello stato

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1\rangle - ie^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|2\rangle}{\sqrt{2}},$$

con

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2} \frac{n^2}{L^2 m}.$$

Evoluzione dei valori medi

$$\langle \mathbf{p}(t) \rangle = -\Im \left(\langle 2|\mathbf{p}|1 \rangle e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \right) = \hbar \frac{8}{3L} \cos \frac{E_2-E_1}{\hbar}t = \hbar \frac{8}{3L} \cos \frac{3\pi^2 \hbar}{2L^2 m}t,$$

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \frac{L}{2} - \langle 2|\mathbf{x}|1 \rangle \Im \left(e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \right) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2} \sin \frac{3\pi^2 \hbar}{2L^2 m}t.$$

Periodo classico vs. periodo quantistico

$$T_{cl} = \frac{3L^2 m}{4\hbar},$$

$$T_q = \frac{4L^2 m}{3\pi \hbar}.$$
