

Lezione 10/11/2023

Esercizio 1. Un oscillatore armonico di frequenza ω si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Valutare la fluttuazione quadratica media della posizione nel tempo.

Sol: In rappresentazione di Heisenberg gli operatori evolvono come

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{a}] = i\omega [\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \mathbf{a}] = -i\omega \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a}(t) = e^{-i\omega t} \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a}^\dagger(t) = e^{i\omega t} \mathbf{a}^\dagger.$$

La posizione media è

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \frac{\ell}{\sqrt{2}} \langle \psi | (\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}^\dagger(t)) | \psi \rangle = \\ &= \frac{i\ell}{2\sqrt{2}} (\langle 0 | \mathbf{a} | 1 \rangle e^{-i\omega t} - \langle 1 | \mathbf{a}^\dagger | 0 \rangle e^{i\omega t}) = \\ &= \frac{\ell}{\sqrt{2}} \sin \omega t, \end{aligned}$$

la media del quadrato della posizione

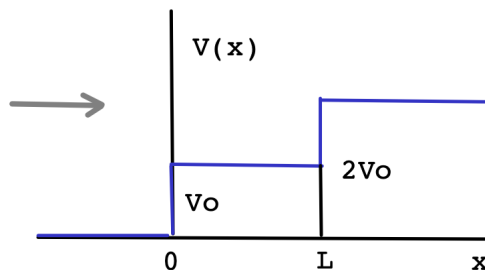
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}^2(t) \rangle &= \frac{\ell^2}{2} \langle \psi | (\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}^\dagger(t))^2 | \psi \rangle = \\ &= \frac{\ell^2}{2} \langle \psi | (\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) | \psi \rangle = \\ &= \frac{\ell^2}{2} \langle \psi | (\mathbf{I} + 2\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) | \psi \rangle = \ell^2, \end{aligned}$$

per cui

$$\sigma_x^2 = \langle \mathbf{x}^2(t) \rangle - \langle \mathbf{x}(t) \rangle^2 = \ell^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \omega t}{2} \right).$$

Esercizio 2. Impostare il seguente problema. Un fascio di particelle incide sulla barriera mostrata in figura. Quando $E > 2V_0$:

1. Scrivere la forma generale delle funzioni d'onda nelle diverse regioni spaziali
2. Determinare le correnti incidenti, riflesse e trasmesse ed esprimere i coefficienti di riflessione e trasmissione



Sol: La soluzione di

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \psi(x),$$

per $E > 2V_0$ non è normalizzabile e ha la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1 x} + A e^{-ik_1 x} & x < 0 \\ B e^{ik_2 x} + C e^{-ik_2 x} & 0 < x < L \\ D e^{ik_3 x} & x > L \end{cases}$$

con $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{2m(E-2V_0)}{\hbar^2}}$. Le condizioni di raccordo sono

$$\begin{aligned} 1 + A &= B + C \\ B e^{i(k_2-k_3)L} + C e^{-i(k_2+k_3)L} &= D \\ 1 - A &= \frac{k_2}{k_1} (B - C) \\ B e^{i(k_2-k_3)L} - C e^{-i(k_2+k_3)L} &= \frac{k_3}{k_2} D. \end{aligned}$$

La corrente è

$$j(x) = \frac{\hbar}{m} \begin{cases} k_1 (1 - |A|^2) & x < 0 \\ k_2 (|B|^2 - |C|^2) & 0 < x < L \\ k_3 |D|^2 & x > L \end{cases}$$

dalla quale si ricavano le correnti incidente, riflessa e trasmessa

$$j_i = \frac{\hbar}{m} k_1,$$

$$j_r = -\frac{\hbar}{m} k_1 |A|^2,$$

$$j_t = \frac{\hbar}{m} k_3 |D|^2,$$

corrispondenti ai coefficienti

$$R = \left| \frac{j_r}{j_i} \right| = |A|^2,$$

$$T = \left| \frac{j_t}{j_i} \right| = \frac{k_3}{k_1} |D|^2.$$

Determiniamo le costanti

$$B = \frac{1}{2k_2} (k_2 + k_3) e^{-i(k_2-k_3)L} D,$$

$$C = \frac{1}{2k_2} (k_2 - k_3) e^{i(k_2+k_3)L} D,$$

$$1 + A = \frac{D}{2k_2} \left[(k_2 + k_3) e^{-i(k_2-k_3)L} + (k_2 - k_3) e^{i(k_2+k_3)L} \right],$$

$$1 - A = \frac{D}{2k_1} \left[(k_2 + k_3) e^{-i(k_2-k_3)L} - (k_2 - k_3) e^{i(k_2+k_3)L} \right],$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{4k_1k_2}{(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2^2 + k_2k_3) e^{-i(k_2-k_3)L} + (k_1k_2 - k_1k_3 - k_2^2 + k_2k_3) e^{i(k_2+k_3)L}} = \\ &= \frac{4}{\left(1 + \sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}} + \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} + \sqrt{\frac{E-2V_0}{E}} \right) e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(1 - \sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}} - \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} + \sqrt{\frac{E-2V_0}{E}} \right) e^{i(k_2+k_3)L}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{D}{4} \left[\left(1 + \frac{k_3}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_3}{k_1} \right) e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(1 - \frac{k_3}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_3}{k_1} \right) e^{i(k_2+k_3)L} \right] = \\ &= \frac{D}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}} - \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} - \sqrt{\frac{E-2V_0}{E}} \right) e^{-i(k_2-k_3)L} + \\ &\quad + \frac{D}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}} + \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} - \sqrt{\frac{E-2V_0}{E}} \right) e^{i(k_2+k_3)L} \\ &= \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}} - \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} - \sqrt{\frac{E-2V_0}{E}} \right) e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(1 - \sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}} + \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} - \sqrt{\frac{E-2V_0}{E}} \right) e^{i(k_2+k_3)L}}{\left(1 + \sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}} + \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} + \sqrt{\frac{E-2V_0}{E}} \right) e^{-i(k_2-k_3)L} + \left(1 - \sqrt{\frac{E-2V_0}{E-V_0}} - \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} + \sqrt{\frac{E-2V_0}{E}} \right) e^{i(k_2+k_3)L}} \end{aligned}$$

Esercizio 3. Una particella si muove nel potenziale $V = \lambda(x^4 - x^2)$ con $\lambda > 0$.

1. Scrivere l'equazione di Schroedinger per il problema nella rappresentazione della coordinata.
2. Valutare un estremo inferiore E_m tale che $E_0 > E_m$ con E_0 energia dello stato fondamentale.
3. Valutare $\langle n|\mathbf{x}|n \rangle$ su un generico autostato dell'energia.

Sol:

1. Eq. di Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \lambda(x^4 - x^2)\psi(x) = E\psi(x).$$

2. Un estremo inferiore può essere fissato nel minimo del potenziale corrispondente ai due punti

$$\pm x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$E_m = V(x_0) = -\frac{\lambda}{4}.$$

3. L'Hamiltoniana è pari

$$[\mathbf{H}, \mathbf{\Pi}] = 0,$$

per cui le autofunzioni sono funzioni pari o dispari. Il valor medio

$$\langle n|\mathbf{x}|n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \psi_n^2(x) = 0,$$

è nullo perchè l'integrando è dispari.

Esercizio 4. Il vettore di polarizzazione del campo elettromagnetico può essere associato a uno stato in uno spazio di Hilbert a due dimensioni. Se la direzione di propagazione del campo è $\hat{z}$, una base ortonormale per il vettore di polarizzazione è data dai due vettori di polarizzazione lineare lungo x e lungo y

$$|x\rangle, |y\rangle.$$

Uno stato generico di polarizzazione è quindi parametrizzato da due parametri indipendenti θ e ϕ

$$|\psi\rangle = \cos\theta |x\rangle + e^{i\phi} \sin\theta |y\rangle.$$

1. Esprimere tale stato nella base dei vettori di polarizzazione circolare

$$|C_{\pm}\rangle = \frac{|x\rangle \pm i|y\rangle}{\sqrt{2}}.$$

2. Dire a che polarizzazione corrispondono i vettori

$$|\pm\rangle = \frac{|x\rangle \pm |y\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Sol:

1. I vettori di polarizzazione circolare formano una base ortonormale perché

$$\langle C_i | C_j \rangle = \delta_{ij},$$

in questa base

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos\theta (\langle C_+ | x \rangle |C_+\rangle + \langle C_- | x \rangle |C_-\rangle) + e^{i\phi} \sin\theta (\langle C_+ | y \rangle |C_+\rangle + \langle C_- | y \rangle |C_-\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos\theta - ie^{i\phi} \sin\theta) |C_+\rangle + (\cos\theta + ie^{i\phi} \sin\theta) |C_-\rangle]. \end{aligned}$$

2. Corrispondono alla polarizzazione $\pm 45^\circ$.

Esercizio 5. Potenziale a δ . Data una particella di massa m in una dimensione sottoposta al potenziale

$$U(x) = g\delta(x)$$

calcolare spettro e autostati dell'Hamiltoniana per valori di g negativi e positivi.

Sol: Assumendo la continuità della funzione d'onda, nel caso di potenziale a δ la derivata prima è in generale discontinua, infatti integrando in un intorno di $x = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \psi''(x) = -g \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \delta(x) \psi(x) + E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \psi(x),$$

mandando ϵ a zero si ottiene

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0).$$

Dividiamo lo spazio in due intervalli: I per $x < 0$ e II per $x > 0$

- **Caso $g < 0$ e $E < 0$.** Ci sono stati legati, indichiamo $k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

$$\psi_I = Ae^{kx},$$

$$\psi_{II} = Be^{-kx}.$$

Per la continuità della ψ

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A = B,$$

mentre la condizione sulla derivata prima dà

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) - \frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0) \Rightarrow kA = -\frac{mg}{\hbar^2} A$$

ossia esiste un solo stato legato con energia

$$E = -\frac{mg^2}{2\hbar^2},$$

e funzione d'onda

$$\psi(0) = \sqrt{\frac{mg}{\hbar^2}} \left(\theta(-x) e^{-\frac{mg}{\hbar^2} x} + \theta(x) e^{\frac{mg}{\hbar^2} x} \right).$$

- **Caso $g < 0$ e $E > 0$.** Stati di scattering $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

$$\psi_I = e^{ikx} + C_R e^{-ikx},$$

$$\psi_{II} = C_T e^{ikx}.$$

Le condizioni al raccordo sono

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow 1 + C_R = C_T,$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) - \frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0) \Rightarrow ik(1 - C_R) = \left(ik - \frac{k^2 g}{E} \right) C_T,$$

$$1 = \left(1 + \frac{ikg}{2E} \right) C_T \Rightarrow C_T = \frac{2E}{2E - ikg}$$

$$C_R = C_T - 1 = \frac{ikg}{2E - ikg}$$

$$T = |C_T|^2 = \frac{4E^2}{4E^2 + k^2 g^2} = \frac{1}{1 + \frac{mg^2}{2\hbar^2 E}},$$

$$R = |C_R|^2 = \frac{1}{\frac{2E\hbar^2}{mg^2} + 1}.$$

Notare che torna con il caso limite della barriera di potenziale.

- **Caso $g > 0$ e $E > 0$.** Il problema è analogo a quello precedente ma con g negativa, i coefficienti di trasmissione e riflessione rimangono inalterati.