

Lezione 17/11/2023

Esercizio 1. Calcolare i valori medi di $\mathbf{L}_x$ e $\mathbf{L}_y$ in un autostato generico di $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$.

Sol: Ricordando che

$$\mathbf{L}_{\pm} |l, m\rangle = f_{\pm}(l, m) |l, \pm 1\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle l, m | \mathbf{L}_x | l, m \rangle &= \frac{1}{2} \langle l, m | (\mathbf{L}_+ + \mathbf{L}_-) | l, m \rangle = \\ &= \frac{1}{2} [f_-(l, m) \langle l, m | l, m-1 \rangle + f_+(l, m) \langle l, m | l, m+1 \rangle] = 0. \end{aligned}$$

Discorso analogo per $\mathbf{L}_y$.

Esercizio 2. Calcolare i valori medi di $\mathbf{L}_x^2$ e $\mathbf{L}_y^2$ in un autostato generico di $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$.

Sol: Ricordando che

$$[\mathbf{L}_+, \mathbf{L}_-] = 2\hbar\mathbf{L}_z,$$

possiamo esprimere i quadrati delle componenti x e y del momento angolare come

$$\mathbf{L}_x^2 = \frac{\mathbf{L}_+^2 + \mathbf{L}_-^2 + 2\mathbf{L}_-\mathbf{L}_+ + 2\hbar\mathbf{L}_z}{4},$$

$$\mathbf{L}_y^2 = \frac{-\mathbf{L}_+^2 - \mathbf{L}_-^2 + 2\mathbf{L}_-\mathbf{L}_+ + 2\hbar\mathbf{L}_z}{4},$$

quindi

$$\begin{aligned} \langle l, m | \mathbf{L}_x^2 | l, m \rangle &= \frac{1}{2} \langle l, m | (\mathbf{L}_-\mathbf{L}_+ + \hbar\mathbf{L}_z) | l, m \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle l, m | \mathbf{L}_-\mathbf{L}_+ | l, m \rangle + \frac{m\hbar^2}{2} = \\ &= \frac{\hbar^2}{2} (l(l+1) - m(m+1) + m) = \\ &= \frac{\hbar^2}{2} (l(l+1) - m^2) = \langle l, m | \mathbf{L}_y^2 | l, m \rangle \end{aligned}$$

Esercizio 3. Stimare il valore minimo del prodotto

$$\langle (\Delta\mathbf{L}_x)^2 \rangle \langle (\Delta\mathbf{L}_y)^2 \rangle,$$

su di un autostato di $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$. Calcolare esplicitamente tale prodotto per $l=1$ $m=0$.

Sol: Per il principio di indeterminazione si ha

$$\langle (\Delta\mathbf{L}_x)^2 \rangle \langle (\Delta\mathbf{L}_y)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle l, m | [\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] | l, m \rangle|^2 = \frac{\hbar^4}{4} m^2.$$

Poiché

$$\langle l, m | \mathbf{L}_x^2 | l, m \rangle = \langle l, m | \mathbf{L}_y^2 | l, m \rangle = \frac{\hbar^2}{2} (l(l+1) - m^2),$$

il minimo di indeterminazione si ha per $m = \pm l$.

Esercizio 4. Calcolare il valor medio, su di un autostato di $\mathbf{L}_z$ e $\mathbf{L}^2$, della componente del momento angolare lungo una direzione $\vec{n}$ che forma un angolo θ rispetto alla direzione z .

Sol: Il versore ha coordinate

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned}\langle l, m | \mathbf{L}_z | l, m \rangle &= \hbar m, \\ \langle l, m | \mathbf{L}_x | l, m \rangle &= \langle l, m | \mathbf{L}_y | l, m \rangle = 0,\end{aligned}$$

e quindi

$$\langle l, m | \vec{n} \cdot \vec{\mathbf{L}} | l, m \rangle = \hbar m \cos \theta$$

Esercizio 5. Calcolare autovalori e autovettori di $\mathbf{L}_x$ e $\mathbf{L}_y$ nel caso in cui $l = 1$.

Sol: Per simmetria rispetto alla scelta di orientazione degli assi, gli autovalori sono gli stessi di $\mathbf{L}_z$ ossia $m = 0, \pm \hbar$. Gli autostati hanno la forma

$$|\psi\rangle = a_1 |1, 1\rangle + a_0 |1, 0\rangle + a_{-1} |1, -1\rangle$$

$$\mathbf{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori di $\mathbf{L}_x$ sono quindi

$$|1, 1\rangle_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, |1, 0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, |1, -1\rangle_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

mentre gli autovettori di $\mathbf{L}_y$ sono

$$|1, 1\rangle_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, |1, 0\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |1, -1\rangle_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova in una buca di potenziale infinita in uno stato per cui una misura di energia fornisce con probabilità $\frac{2}{3}$ il valore E_1 e con probabilità $\frac{1}{3}$ il valore E_2 .

1. Scrivere lo stato più generale che soddisfi queste condizioni. Quanti parametri reali parametrizzano tale stato?
2. Qual è la probabilità di misurare spin $\uparrow$?
3. Qual è il valor medio $\langle \mathbf{S}_z \rangle$?

Sol:

1. Lo stato generale è

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}|E_1\rangle|\chi_1\rangle + e^{i\phi}|E_2\rangle|\chi_2\rangle}{\sqrt{3}},$$

dove $|\chi_{1,2}\rangle$ sono due stati di spin

$$|\chi_j\rangle = \cos \theta_j |\uparrow\rangle + e^{i\nu_j} \sin \theta_j |\downarrow\rangle.$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2} \cos \theta_1 |E_1\rangle |\uparrow\rangle + \sqrt{2} e^{i\nu_1} \sin \theta_1 |E_1\rangle |\downarrow\rangle + e^{i\phi} \cos \theta_2 |E_2\rangle |\uparrow\rangle + e^{i(\phi+\nu_2)} \sin \theta_2 |E_2\rangle |\downarrow\rangle}{\sqrt{3}}.$$

2. La probabilità di misurare $\uparrow$ è

$$P_{\uparrow} = |\langle \psi | \uparrow \rangle|^2 = \frac{2 \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2}{3}.$$

Ovviamente

$$P_{\downarrow} = 1 - P_{\uparrow} = \frac{2 \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2}{3}$$

3. Valor medio:

$$\langle \mathbf{S}_z \rangle = \langle \psi | \mathbf{S}_z | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{2 \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - 2 \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}{3} = \frac{\hbar}{2} \frac{2 \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2}{3}.$$