

Lezione 29/11/2023

Esercizio 1. Calcolare i coefficienti di Clebsch-Gordan per $l_1 = 1$ e $l_2 = \frac{1}{2}$.

Sol: Stati con $l = \frac{3}{2}$

$$|l = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}\rangle = |m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2}\rangle.$$

$$|l = \frac{3}{2}, m = -\frac{3}{2}\rangle = |m_1 = -1, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle.$$

$$\mathbf{L}_- |l = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3} |l = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle.$$

$$(\mathbf{L}_1^- + \mathbf{L}_2^-) |m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2} |m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{2}\rangle + \hbar |m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle,$$

$$|l = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle.$$

$$\mathbf{L}_-^2 |l = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}\rangle = \hbar^2 2\sqrt{3} |l = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle,$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_1^- + \mathbf{L}_2^-)^2 |m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2}\rangle &= \hbar (\mathbf{L}_1^- + \mathbf{L}_2^-) \left(\sqrt{2} |m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{2}\rangle + |m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle \right) = \\ &= \hbar^2 \left(2 |m_1 = -1, m_2 = \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2} |m_1 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2} |m_1 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle \right) \end{aligned}$$

$$|l = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |m_1 = -1, m_2 = \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |m_1 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle.$$

Stati con $l = \frac{1}{2}$

$$|l = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle = a |m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{2}\rangle + b |m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle,$$

$$\langle l = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2} | l = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \rangle = a\sqrt{\frac{2}{3}} + b\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,$$

imponendo anche la normalizzazione si ha

$$|l = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle.$$

$$\mathbf{L}_- |l = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle = \hbar |l = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle,$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_1^- + \mathbf{L}_2^-) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} |m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle \right) &= \\ = \hbar \left(\sqrt{\frac{2}{3}} |m_1 = -1, m_2 = \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |m_1 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle \right) &, \end{aligned}$$

$$|l = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |m_1 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |m_1 = -1, m_2 = \frac{1}{2}\rangle.$$

Esercizio 2. Una particella di spin $\frac{1}{2}$ evolve secondo l'Hamiltoniana (dipendente dal tempo)

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\mu\sigma_z B_1 & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ \mu\sigma_z B_2 & \text{per } t > T \end{cases}.$$

Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ dove

$$\sigma_x |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle.$$

1. Scrivere l'evoluzione temporale dello stato.
2. Determinare B_2 tale che la probabilità di ottenere $-\frac{\hbar}{2}$ in una misura di $\mathbf{S}_y$ al tempo $t = 2T$ sia pari a 1.

Sol: L'operatore di evoluzione temporale è

$$\mathbf{U} = \begin{cases} e^{i\frac{\sigma_z \mu B_1}{\hbar} t} & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ e^{-i\frac{\sigma_z \mu (B_2(t-T) - B_1 T)}{\hbar}} & \text{per } t > T \end{cases},$$

e lo stato iniziale è

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Quindi per $t < T$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\frac{\mu B_1 t}{\hbar}} |\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\mu B_1 t}{\hbar}} |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Per $t > T$

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U} |\psi(T)\rangle = \frac{e^{i\frac{\mu(B_1 T - B_2(t-T))}{\hbar}} |\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\mu(B_1 T - B_2(t-T))}{\hbar}} |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Gli autostati di σ_y sono

$$|\pm_y\rangle = \frac{|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \sigma |\pm_y\rangle = \pm |\pm_y\rangle,$$

$$|\uparrow\rangle = \frac{|+_y\rangle + |-_y\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\downarrow\rangle = -i \frac{|+_y\rangle - |-_y\rangle}{\sqrt{2}},$$

quindi

$$\begin{aligned} |\psi(2T)\rangle &= \frac{e^{i\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}} |\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}} |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{e^{i\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}} - ie^{-i\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}}}{2} |+_y\rangle - \frac{e^{i\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}} + ie^{-i\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}}}{2} |-_y\rangle. \end{aligned}$$

Affinché $|\psi(2T)\rangle = e^{i\phi} |-_y\rangle$ si deve avere

$$\left| \frac{e^{i\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}} - ie^{-i\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}}}{2} \right|^2 = \frac{2 + i \left(e^{i2\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}} - e^{-i2\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}} \right)}{4} = \frac{1 - \sin 2\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar}}{2} = 1,$$

ossia

$$2\frac{\mu(B_1 - B_2)T}{\hbar} = -\frac{4n+1}{2}\pi,$$

$$B_2 = B_1 + \frac{4n+1}{4\mu T}\hbar\pi.$$

Esercizio 3. Al tempo $t = 0$ la f.d.o. di una particella di spin zero è

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}} \left(1 + \frac{x + iy + z}{r} \right),$$

con

$$\int_0^\infty dr r^2 |f(r)|^2 = 1$$

1. Quali risultati si possono ottenere facendo una misura di $\mathbf{L}_z$ e di $\mathbf{L}^2$ e con quali probabilità?
2. Supponendo che l'Hamiltoniana del sistema sia

$$\mathbf{H} = g\mathbf{L}_z,$$

con g costante reale, si scriva lo stato al tempo $t > 0$.

3. Calcolare in funzione del tempo $\langle \mathbf{L}_x \rangle$, $\langle \mathbf{L}_y \rangle$, $\langle \mathbf{L}_z \rangle$

Sol: In coordinate sferiche

$$\begin{aligned}
 \psi(r, \theta, \phi, t=0) &= \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}} (1 + \cos \phi \sin \theta + i \sin \phi \sin \theta + \cos \theta) = \\
 &= \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}} (1 + e^{i\phi} \sin \theta + \cos \theta) = \\
 &= \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}} \left(\sqrt{4\pi} Y_0^0 - \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_1^1 + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0 \right) = \\
 &= f(r) \left(\sqrt{\frac{1}{2}} Y_0^0 - \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^1 + \sqrt{\frac{1}{6}} Y_1^0 \right).
 \end{aligned}$$

Quindi

$$|\psi\rangle = |f\rangle \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |0, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} |1, 0\rangle \right).$$

1. Si possono ottenere i seguenti risultati: $L^2 = 0, 2\hbar^2$ e $L_z = 0, \hbar$

$$l = 0 \quad P_{l=0} = \frac{1}{2},$$

$$l = 1 \quad P_{l=1} = \frac{1}{2},$$

$$m = 0 \quad P_{m=0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$m = 1 \quad P_{m=1} = \frac{1}{3}.$$

2. Evoluzione temporale:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{g\mathbf{L}_z}{\hbar}t} |\psi\rangle = |f\rangle \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |0, 0\rangle - e^{-igt} \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} |1, 0\rangle \right).$$

3. Medie:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{L}_x \rangle &= \langle \psi(t) | \frac{\mathbf{L}_+ + \mathbf{L}_-}{2} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{18}} (-e^{-igt} \langle 1, 0 | \mathbf{L}_- | 1, 1 \rangle - e^{igt} \langle 1, 1 | \mathbf{L}_+ | 1, 0 \rangle) = \\
 &= -\frac{\hbar}{3} \cos gt, \\
 \langle \mathbf{L}_y \rangle &= \langle \psi(t) | \frac{\mathbf{L}_+ - \mathbf{L}_-}{2i} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{1}{18}} (e^{-igt} \langle 1, 0 | \mathbf{L}_- | 1, 1 \rangle - e^{igt} \langle 1, 1 | \mathbf{L}_+ | 1, 0 \rangle) = \\
 &= -\frac{\hbar}{3} \sin gt, \\
 \langle \mathbf{L}_z \rangle &= \frac{\hbar}{3}
 \end{aligned}$$

Esercizio 4. L'Hamiltoniana di due particelle distinguibili con spin $s_1 = s_2 = 1$ è

$$\mathbf{H} = -g\vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2, \quad \text{con } g > 0$$

Determinare gli autovalori e lo stato fondamentale con relativa degenerazione. Cosa cambia se si aggiunge il termine nell'hamiltoniana

$$-B(\mathbf{S}_{1z} + \mathbf{S}_{2z}).$$

Sol: Notiamo che

$$(\vec{\mathbf{S}}_1 + \vec{\mathbf{S}}_2)^2 = (\vec{\mathbf{S}}_1^2 + \vec{\mathbf{S}}_2^2 + 2\vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2),$$

quindi

$$\vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2 = \frac{(\vec{\mathbf{S}}_1 + \vec{\mathbf{S}}_2)^2 - \vec{\mathbf{S}}_1^2 - \vec{\mathbf{S}}_2^2}{2}.$$

Gli autostati di questo operatore sono quindi gli autostati simultanei di $\left(\vec{\mathbf{S}}_1 + \vec{\mathbf{S}}_2\right)^2$, $\vec{\mathbf{S}}_1^2$, $\vec{\mathbf{S}}_2^2$

$$|1, 1; l, m\rangle,$$

con $l = 0, 1, 2$ e $m = -l, \dots, l$. L'Hamiltoniana si può scrivere come

$$\mathbf{H} = -g\hbar^2 \frac{\left(\vec{\mathbf{S}}_1 + \vec{\mathbf{S}}_2\right)^2 - \vec{\mathbf{S}}_1^2 - \vec{\mathbf{S}}_2^2}{2},$$

per cui i suoi autostati sono

$$E(l, m) = -g\hbar^2 \frac{l(l+1) - 4}{2},$$

e hanno degenerazione $d = 2l + 1$. Lo stato fondamentale ha energia

$$E_0 = E(2, m) = -g\hbar,$$

con degenerazione $d = 5$. Introducendo il termine ulteriore, la degenerazione si rompe, le energie diventano

$$E(l, m) = -g\hbar^2 \frac{l(l+1) - 4}{2} - B\hbar m,$$

quindi lo stato fondamentale non è più degenere ed ha energia

$$E_0 = E(2, 2) = -(g\hbar^2 + 2B).$$