

Lezione 15/12/2023

Esercizio 1. Un atomo di idrogeno è posto in un potenziale

$$\mathbf{V} = -g \left(\vec{\mathbf{L}} + 2\vec{\mathbf{S}} \right) \cdot \vec{B}$$

dove $\vec{B}$ è un campo magnetico esterno che assumiamo diretto lungo z .

1. L'Hamiltoniana di perturbazione commuta con l'Hamiltoniana dell'atomo di Idrogeno imperturbato?
2. Quale degenerazione è rimossa dalla perturbazione?

Sol: L'Hamiltoniana totale è

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{cm} + \mathbf{H}_H - g (\mathbf{L}_z + 2\mathbf{S}_z) B,$$

sappiamo che l'Hamiltonian dell'oscillatore armonico è funzione di $\mathbf{L}^2$ e non dipende dallo spin per cui

$$[\mathbf{H}_H, \mathbf{L}_z] = [\mathbf{H}_H, \mathbf{S}_z] = 0,$$

quindi

$$[\mathbf{H}_H, \mathbf{V}] = 0.$$

Il potenziale rimuove la degenerazione di spin e quella in L_z . Le nuove energie sono

$$E_{n,m,\sigma} = \frac{E_1}{n^2} - g\hbar B (m + 2\sigma).$$

Esercizio 2. Due particelle identiche (massa m) sono confinate su di un segmento di lunghezza L . Determinare lo stato fondamentale ed il primo(i) eccitato(i) nel caso di: bosoni di spin zero e fermioni di spin $\frac{1}{2}$. Aggiungiamo una interazione del tipo

$$V(x_1 - x_2) = \lambda \delta(x_1 - x_2)$$

per bosoni di spin zero, e del tipo

$$V(x_1 - x_2) = \frac{\lambda}{\hbar^2} \vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2 \delta(x_1 - x_2)$$

per fermioni di spin $\frac{1}{2}$. Determinare la correzione al prim'ordine allo stato fondamentale. Nel secondo caso, L'Hamiltoniana complessiva commuta con lo spin totale $\mathbf{S}^2$ e con la sua componente $\mathbf{S}_z$?

Sol: Dati gli autostati di singola particella $|\psi_n\rangle$ e le relative energie $\epsilon_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2L^2 m} = \epsilon_1 n^2$ costruiamo lo stato fondamentale e il primo eccitato:

- Caso di due bosoni di spin zero. Stato fondamentale

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle, \quad E_0 = 2\epsilon_1,$$

primo stato eccitato

$$|\Psi_1\rangle = \frac{|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad E_1 = 5\epsilon_1.$$

- Caso di due fermioni di spin $\frac{1}{2}$. Stato fondamentale

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle |\chi_S\rangle, \quad E_0 = 2\epsilon_1,$$

con

$$|\chi_S\rangle = \frac{|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

primi stati eccitati $E_1 = 5\epsilon_1$,

$$|\Psi_1^{(S)}\rangle = \frac{(|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle) (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle)}{2},$$

$$|\Psi_1^{(T1)}\rangle = \frac{(|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle) (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle)}{2},$$

$$|\Psi_1^{(T2)}\rangle = \frac{(|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle) |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|\Psi_1^{(T3)}\rangle = \frac{(|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle) |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Aggiungendo l'interazione ai bosoni si ha

$$\begin{aligned}
 E_0^{int} &= E_0 + \lambda \frac{4}{L^2} \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \delta(x_1 - x_2) \sin^2 \frac{\pi}{L} x_1 \sin^2 \frac{\pi}{L} x_2 = \\
 &= E_0 + \lambda \frac{4}{L^2} \int_0^L dx_1 \sin^4 \frac{\pi}{L} x_1 = \\
 &= E_0 + \lambda \frac{4}{L^2} \int_0^L dx \sin^2 \frac{\pi}{L} x \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{L} x\right) = \\
 &= E_0 + \lambda \frac{4}{L^2} \left[\frac{1}{2} \left(\int_0^L dx \sin^2 \frac{\pi}{L} x + \int_0^L dx \cos^2 \frac{\pi}{L} x \right) - \frac{1}{4} \int_0^L dx \sin^2 2 \frac{\pi}{L} x \right] = \\
 &= E_0 + \lambda \frac{2}{L^2} \left[L - \frac{1}{4} \left(\int_0^L dx \sin^2 2 \frac{\pi}{L} x + \int_0^L dx \cos^2 2 \frac{\pi}{L} x \right) \right] = E_0 + \frac{3\lambda}{2L}.
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda i fermioni

$$\begin{aligned}
 E_0^{int} &= E_0 + \lambda \frac{4}{L^2} \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \delta(x_1 - x_2) \sin^2 \frac{\pi}{L} x_1 \sin^2 \frac{\pi}{L} x_2 \langle \chi_S | \vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2 | \chi_S \rangle = \\
 &= E_0 + \frac{3\lambda}{4L} \langle \chi_S | (\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2^2) | \chi_S \rangle = \\
 &= E_0 - \frac{9\lambda}{8L} \hbar^2
 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Una particella di massa m è confinata in un cubo di lato L (ossia $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq z \leq L$)

1. Scrivere autostati ed autovalori dell'Hamiltoniano.
2. Aggiungendo il termine perturbativo

$$\mathbf{V} = \lambda \delta\left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\right) \delta\left(\mathbf{y} - \frac{L}{2}\right) \delta\left(\mathbf{z} - \frac{L}{2}\right)$$

Quale è la costante di sviluppo adimensionale per la teoria perturbativa?

3. Determinare la correzione al primo ordine per l'energia dello stato fondamentale e del primo eccitato.
4. Stimare in base al calcolo precedente il valore della costante di sviluppo adimensionale per il quale l'energia dello stato fondamentale uguaglia quella del primo eccitato e commentare il risultato ottenuto in termini della validità della teoria delle perturbazioni.

Sol: A partire dagli autostati della buca infinita di potenziale in una dimensione, gli autostati del sistema si ottengono come prodotto

$$|\Psi_{n_x, n_y, n_z}\rangle = |\psi_{n_x}\rangle |\psi_{n_y}\rangle |\psi_{n_z}\rangle$$

dove

$$\langle x | \psi_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} n x$$

Le energie corrispondenti sono

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Lo stato fondamentale è

$$|E_0\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle, \quad E_0 = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2mL^2},$$

il primo eccitato è tre volte degenere

$$|E_{1,1}\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle,$$

$$|E_{1,2}\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle,$$

$$|E_{1,3}\rangle = |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle,$$

ed ha energia

$$E_1 = \frac{6\hbar^2\pi^2}{2mL^2}.$$

Il potenziale perturbativo si può esprimere in termini del parametro adimensionale

$$\tilde{\lambda} = \lambda \frac{m}{L\hbar^2},$$

$$\mathbf{V} = \tilde{\lambda} \frac{L\hbar^2}{m} \delta\left(\mathbf{x} - \frac{L}{2}\right) \delta\left(\mathbf{y} - \frac{L}{2}\right) \delta\left(\mathbf{z} - \frac{L}{2}\right) = \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{V}}.$$

La correzione all'energia dello stato fondamentale è

$$E_0^{(1)} = \tilde{\lambda} \frac{8\hbar^2}{mL^2} \int_0^L dx dy dz \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \delta\left(y - \frac{L}{2}\right) \delta\left(z - \frac{L}{2}\right) \sin^2 \frac{\pi}{L} x \sin^2 \frac{\pi}{L} y \sin^2 \frac{\pi}{L} z = \tilde{\lambda} \frac{8\hbar^2}{mL^2},$$

$$E_0 \simeq \left(\frac{3\pi^2}{2} + 8\tilde{\lambda}\right) \frac{\hbar^2}{mL^2}.$$

La correzione al prim'ordine dell'energia del primo stato eccitato è nulla, in quanto nulla la matrice

$$\langle E_{1,i} | \mathbf{V} | E_{1,j} \rangle.$$

In questa approssimazione, i due livelli si incrociano quando $E_0 = E_1$ ossia

$$\frac{3\pi^2}{2} + 8\tilde{\lambda} = 3\pi^2 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{3}{16}\pi^2 = \tilde{\lambda}^*.$$

Lo sviluppo al prim'ordine ha quindi senso per

$$\tilde{\lambda} \ll \tilde{\lambda}^*.$$

Esercizio 4. Una particella senza spin è confinata in un quadrato di lato L .

- Scrivere autovalori ed autofunzioni dell'energia nella rappresentazione della coordinata.
- Il momento angolare lungo la direzione perpendicolare al piano del quadrato è una quantità conservata?

Sol: L'Hamiltoniana è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2}{2m} + \mathbf{V}(x, y, z),$$

con

$$\mathbf{V} = \delta(z) \begin{cases} 0 & 0 < x < L, \ 0 < y < L \\ \infty & \text{altrove} \end{cases}.$$

Autovalori

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2),$$

autovettori

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) = \frac{2}{L} \sin \frac{\pi}{L} n_x x \sin \frac{\pi}{L} n_y y.$$

L'energia cinetica commuta con $\mathbf{L}_z$ tuttavia il potenziale, dipendendo da ϕ non commuta con $\mathbf{L}_z$ per cui il momento angolare non è una quantità conservata.

Esercizio 5. Un sistema di spin $1/2$ si trova inizialmente con lo spin allineato lungo la direzione positiva dell'asse z . Viene effettuata una misura dello spin nella direzione $\hat{u}$ formante un angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$ con l'asse z . Successivamente si misura di nuovo la componente z . Con quali probabilità si osserveranno i valori $\pm \frac{\hbar}{2}$?

Sol: Il sistema si trova inizialmente nell'autostato $|\uparrow\rangle$ di $\mathbf{S}_z$. Quindi si misura l'osservabile

$$\mathbf{S}_\theta = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}\mathbf{S}_y}\mathbf{S}_ze^{i\frac{\theta}{\hbar}\mathbf{S}_y} = \cos\theta\mathbf{S}_z + \sin\theta\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{4}\left(\sigma_z + \sqrt{3}\sigma_x\right),$$

i cui autostati sono

$$|+\theta\rangle = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}\mathbf{S}_y}|\uparrow\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$$

$$|-\theta\rangle = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}\mathbf{S}_y}|\downarrow\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle.$$

Misurando $\mathbf{S}_\theta$ si ottiene $\frac{\hbar}{2}$ con probabilità

$$p(+\theta) = |\langle+\theta|\uparrow\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2},$$

e $-\frac{\hbar}{2}$ con probabilità

$$p(-\theta) = |\langle-\theta|\uparrow\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Alla fine, misurando $\mathbf{S}_z$ si ottiene $\frac{\hbar}{2}$ con probabilità

$$\begin{aligned} p(\uparrow) &= p(\uparrow|+\theta)p(+\theta) + p(\uparrow|-\theta)p(-\theta) = \cos^4\frac{\theta}{2} + \sin^4\frac{\theta}{2} = \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta, \end{aligned}$$

e $-\frac{\hbar}{2}$ con probabilità

$$p(\downarrow) = \sin^2\theta.$$