

Corso di laurea in Fisica

Compito d'esame di Istituzioni di Fisica Teorica

L'Aquila 20 Luglio 2011

suggerimenti per la soluzione

- 1) Un rotatore si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{3}|1, -1\rangle - \frac{i\sqrt{6}}{3}|1, 0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}|1, 1\rangle$$

dove $|\ell, m\rangle$ sono autostati del momento angolare.

- In una misura di L_z su detto stato quale è il valore più probabile e con quale probabilità si ottiene tale valore?
- Assumendo una evoluzione governata dall'Hamiltoniano

$$H = -\mu L_z$$

come varia nel tempo la probabilità di cui al punto precedente?

lo stato iniziale non è autostato di L_z ma una combinazione, le probabilità di ottenere un dato valore di L_z sono immediatamente deducibili dai coefficienti così come l'evoluzione dello stato che avrà fattori di fase determinati dagli autovalori dell'Hamiltoniano

- 2) Due oscillatori armonici unidimensionali identici di frequenza ω interagiscono secondo un potenziale

$$V(x_1, x_2) = -kx_1x_2$$

dove $k = m\omega^2$ ed m è la massa di un qualsiasi oscillatore.

- Determinare lo stato fondamentale del sistema nel caso che

a) gli oscillatori siano bosoni di spin nullo

b) gli oscillatori siano fermioni di spin 1/2

Il potenziale che agisce sulle due particelle si scrive come $V_{tot} = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$. Si può dunque dividere la parte baricentrale, che risulta libera, da quella del moto relativo che risulta armonica. Lo stato fondamentale è dunque (a parte lo spin) quello nel quale l'impulso baricentrale è nullo mentre la parte relativa è espressa dalla funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico che è pari e come tale simmetrica per scambio. Per i fermioni bisogna opportunamente scegliere la parte di spin in modo tale che lo stato complessivo risulti anti-simmetrico per scambio.

- 3) Un gas perfetto costituito da N particelle di massa M si trova ad una temperatura di $300^\circ K$ esso può considerarsi classico. Un altro gas formato da N fermioni molto più leggeri ($m \ll M$) ha la stessa energia media per particella del gas classico.

- Assumendo che la temperatura del gas quantistico sia nulla determinare l'energia di Fermi del gas quantistico.
- Se la temperatura del gas quantistico fosse la stessa del gas classico l'assunzione fatta nel punto precedente sarebbe giustificata?

(L'energia $k_B T$ per un $^\circ K$ equivale a $1.38 \cdot 10^{-23}$ Joule oppure $8.6 \cdot 10^{-5}$ eV)

La densità degli stati a 3 dimensioni è $\mathcal{N}(\epsilon) = a\sqrt{\epsilon}$ calcolando l'energia media nel gas di Fermi a $T = 0$ e dividendo il risultato per il numero medio di particelle si nota che esso non dipende dalla costante a ($\frac{U}{N} = \frac{3}{2}E_F$). Per il gas perfetto classico l'energia interna per particella è proporzionale alla temperatura e da questo si può ricavare E_F . Per i dati del problema otteniamo $E_F \propto k_B T$ con T temperatura del gas classico e con la costante di proporzionalità di ordine 1. Dunque se la temperatura del gas di Fermi è la stessa di quello classico l'assunzione fatta risulta ingiustificata.