

Esercizio 1

Nelle variabili del centro di massa ed in quelle relative:

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \mu = \frac{m}{2} \quad M = 2m$$

$$H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \underbrace{\left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(|\vec{r}|) \right)}_{\text{potenziale centrale}} \leftarrow H_r$$

$$\text{C.S.C.O.} \quad \vec{P}, H_r, L^2, L_z + \underbrace{S_1^2, S_2^2, S_z^{(1)}, S_z^{(2)}}_{\text{Spin}}$$

Aggiungo V che siamo con

$$V = -\frac{g}{2} (\vec{S}^2 - S_1^2 - S_2^2) = -$$

allora devo separare la parte spinoriale

$$\text{C.S.C.O.} \quad \begin{matrix} S^2, S_z, S_1^2, S_2^2 \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \text{Totale} \end{matrix}$$

Esercizio 2

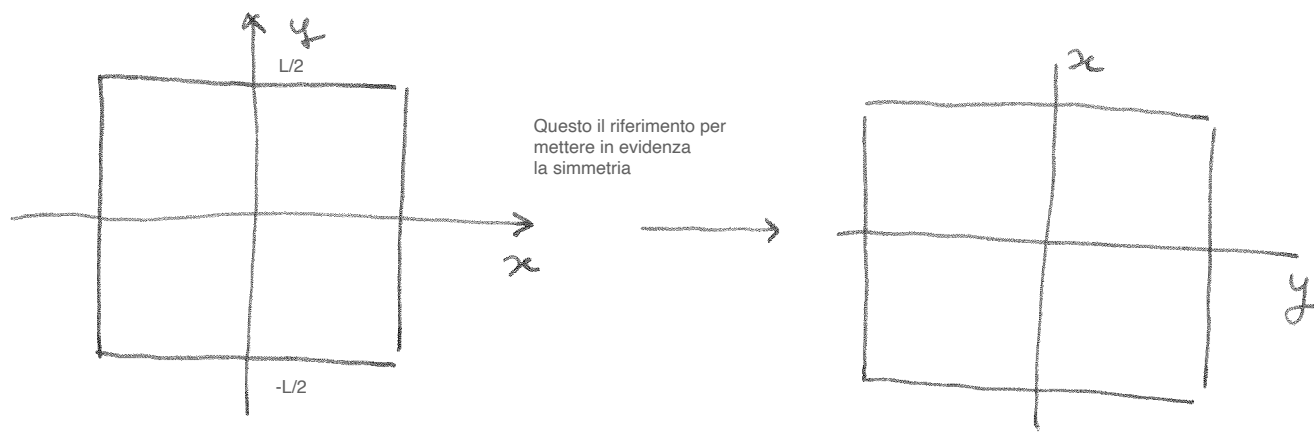
$$V = \lambda f(x) f(y)$$

- è simmetrico w.r.t. lo scambio $x \rightarrow y$
 $y \rightarrow x$

- l'energia cinetica lo è anche

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

- l'energia potenziale è anch'essa simmetrica



- Dunque tutta H è simmetrica

$$H \doteq \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}_{\hat{T}} + \underbrace{V_0(x, y) + \lambda f(x) f(y)}_{\hat{V}}$$

↑
potenziale
confinante

$$[H, V] \neq 0 \quad \text{perché} \quad [\hat{T}, \hat{V}] \neq 0$$

- lo stato fond ed i e 1° eccitato sono

$$\psi_1(x) \psi_1(y)$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 [2]$$

$$\psi_1(x) \psi_2(y); \psi_1(y) \psi_2(x)$$

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 [4+1]$$

con $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x$ $k_n = \frac{n\pi}{L}$ autofunzioni 1-d
particella su segmento

- la correzione al 1° ordine è

- stato fond

$$\langle 1 | \langle 1 | V | 1 \rangle | 1 \rangle = 0$$

↑
dispari
rispetto a $L/2$

↑
pari

$$= 0 = +\lambda \int_0^L dx \psi_1^2(x) f(x) \int_0^L dx \psi_1^2(x) f(x)$$

↑ ↑ ↑ ↑
pari dispari pari dispari

- altro stato eccitato (è 2 volte degenero)

$$\langle 1 | \langle 2 | V | 2 \rangle | 1 \rangle = \langle 2 | \langle 1 | V | 1 \rangle | 2 \rangle = 0$$

$$\langle 1 | \langle 2 | V | 1 \rangle | 2 \rangle = \lambda \left[\int_0^L dx \psi_1(x) \psi_2(x) f(x) \right]^2$$

$$= \lambda \left(\frac{2}{L} \int_0^L dx \sin \frac{\pi}{L} x \sin \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{\pi}{L} x \right)^2 = \lambda \left(\frac{1}{L} \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy \sin^2(y) \right)^2 = \frac{\lambda}{4}$$

$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{L} x$ π

la matrice V è nel sottospazio degenere

$$V = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i suoi autovalori sono $\pm \frac{\lambda}{2}$ dove

$$E_1^{(\pm)} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 5 \pm \frac{\lambda}{2}$$

c'è un modo facile all'ordine zero agli stati dovuti alla perturbazione -

Gli stati all'ordine zero vanno scelti come autostati di σ_x e non più come stati degeneri

$$\left. \begin{array}{l} |1\rangle_x |2\rangle_y \\ |2\rangle_x |1\rangle_y \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_x |2\rangle_y + |2\rangle_x |1\rangle_y) \rightarrow E_1^{(+)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_x |2\rangle_y - |2\rangle_x |1\rangle_y) \rightarrow E_1^{(-)} \end{array}$$

questi stati hanno simmetria determinata nello scambio $x \leftrightarrow y$

Esercizio 3

considero senza perdere di generalità

B diretto lungo $\hat{z}$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \cancel{2} \frac{\mu_B}{\cancel{\hbar}} B \sigma_z \cancel{\frac{\hbar}{2}}$$

lo stato fondamentale è

$$\psi_{\uparrow, p=0}(\vec{r}) = \left[\frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \right]_{p=0} \chi_{\uparrow} \quad E_{\uparrow, p=0} = -B\mu_B$$

perché spm e coordinate possono essere scelte fattorizzate

Il termine V lo possiamo scrivere in tutta generalità

scegliendo una direzione $\perp$ a $\hat{z}$ p.es. $\hat{x}$

$$V = -\mu_B B' \sigma_x$$

- non commuta con H_0

- l'evoluzione temporale è

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - B\sigma_z - B'\sigma_x \right) t} = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} t} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} (B\sigma_z + B'\sigma_x) t}}_{e^{\frac{i}{2} \Theta(t) \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} t} \left[\cos \frac{\Theta(t)}{2} + i \sin \frac{\Theta(t)}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \right]$$

$$\frac{\Theta(t)}{2} = \frac{t}{\hbar} \sqrt{B^2 + B'^2}$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{B^2 + B'^2}} \begin{pmatrix} B' \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{B^2 + B'^2}} \begin{bmatrix} B & B' \\ B' & -B \end{bmatrix}$$

$$\psi_{\sigma}(\vec{r}, t) = \left[\frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \right]_{p=0} \left(\cos \frac{\Theta(t)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \sin \frac{\Theta(t)}{2} \frac{1}{\sqrt{B^2 + B'^2}} \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \right)$$