

① Soluzione parziale 21 Nov. 2012

1)

$$|4\rangle \xrightarrow{A=a_1} |a_1\rangle \xrightarrow{B=b_1} |1\rangle$$

$$P(a_1) = |\langle 4 | a_1 \rangle|^2 \quad P(b_1) = |\langle a_1 | 1 \rangle|^2$$

+ gli altri possibili casi

$$A = a_2 \quad B = b_1$$

$$A = a_1 \quad B = b_2$$

$$A = a_2 \quad B = b_2$$

Possibili valori misura di A $\rightarrow$ autovalori di A

Stati dopo la misura di A $\rightarrow$ autovettori di A

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = a \sigma_y$$

$$\text{autovalori di } A \quad a_1 = a \quad a_2 = -a$$

autovettori di A

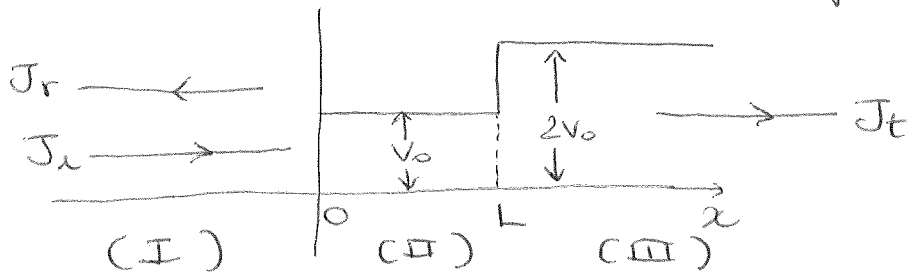
$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad |a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\langle 4 | a_1 \rangle|^2 &= |\langle a_1 | 4 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 - i c_2) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} (|c_1|^2 + |c_2|^2 + i(c_2^* c_1 - c_2 c_1^*)) \end{aligned}$$

analogamente le altre probabilità

2

2) il problema è simile allo diffondere
della barriera di potenziale



$$\psi_I = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$\psi_{II} = C e^{iqx} + D e^{-iqx}$$

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}$$

$$\psi_{III} = E e^{iq'x}$$

$$q' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - 2V_0)}$$

$$J_i = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

$$J_r = \frac{\hbar k}{m} |B|^2$$

$$J_t = \frac{\hbar q'}{m} |E|^2$$

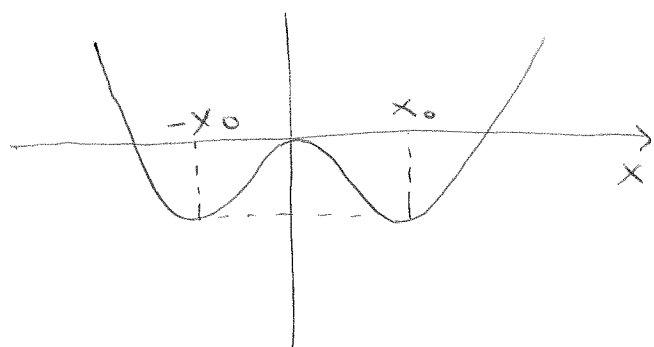
$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} \frac{q'}{k}$$

③

3) l'energia minima classica
(quando $p=0$) è sicuramente
~~X~~ dell'energia dello stato fonda-
mentale

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad 4x^3 - 2x = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow x=0 \text{ max} \\ \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ min} \end{array}$$



$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad V(x_0) = \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

$$E_m = -\frac{\lambda}{4} \quad \times E_0$$

V è pari e quindi $[H, P] = 0$
in un caso m. lo spettro di $V(x)$ è discreto
e gli stati sono non degeneri dunque
gli autovalori di H sono anche autost.
di P e cioè sono o pari o dispari

$$\langle m | X | m \rangle = \int dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pari}}}{|\psi_m(x)|^2} x = 0$$

④

$$4) \quad \langle X^2(t) \rangle = \langle 4 | e^{\frac{i}{\hbar} H t} X^2 e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | 4 \rangle$$

$$X^2 = \frac{e^2}{2} (a^2 + a^{+2} + a a^+ + a^+ a)$$

nel tempo lo stato $|4\rangle$ rimane una
combinazione lineare di $|0\rangle$ e $|1\rangle$

$$|4, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar \omega}{2} t} |0\rangle + i e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{3\hbar \omega}{2} t} |1\rangle \right) =$$

$$= \frac{e^{-i \frac{\omega}{2} t}}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i e^{-i \omega t} |1\rangle)$$

a^2 e a^{+2} non hanno elementi di matrice
 $\neq 0$ fra stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ dunque

$$\langle 4, t | a^2 + a^{+2} | 4, t \rangle = 0$$

$$\langle X^2(t) \rangle = \langle 4, t | \underbrace{a a^+ + a^+ a}_{2a^+ a + 1} | 4, t \rangle \frac{e^2}{2}$$

$$\langle X^2(t) \rangle = \langle 4 | e^{\frac{i}{\hbar} H t} \underbrace{(2\hat{n} + 1)}_{\uparrow} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | 4 \rangle \frac{e^2}{2}$$

Commuta con $H = \hbar \omega (\hat{n} + \frac{1}{2})$

$$\langle X^2(t) \rangle = \langle X^2(0) \rangle = \frac{e^2}{2} \left[\langle 0 | \frac{2n+1}{2} | 0 \rangle + \langle 1 | \frac{2n+1}{2} | 1 \rangle \right] = e^2$$

⑤

5) $|1\rangle$ è auto stato di B quindi

$$B|1\rangle = b_1|1\rangle \quad B^2|1\rangle = b_1^2|1\rangle$$

$$\langle 1|B^2|1\rangle = b_1^2 \quad \langle 1|B|1\rangle = b_1$$

$$\langle 1|\Delta B^2|1\rangle = \langle 1|B^2|1\rangle - (\langle 1|B|1\rangle)^2 = 0$$

$$A^2 = a^2 \sigma_y^2 = a^2 \mathbb{1}$$

$$\langle 1|A^2|1\rangle = a^2 \quad \langle 1|A|1\rangle = 0$$

$$\langle 1|\Delta A^2|1\rangle = a^2$$

$$B = \frac{b_1+b_2}{2} \mathbb{1} + \frac{b_1-b_2}{2} \sigma_z \quad \text{in forma}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{b_1+b_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b_1+b_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1-b_2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b_1-b_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$[A, B] = [a \sigma_y, \frac{b_1+b_2}{2} \mathbb{1} + \frac{b_1-b_2}{2} \sigma_z] =$$

$$= a \frac{b_1-b_2}{2} [\sigma_y, \sigma_z] = a \frac{b_1-b_2}{2} 2i \sigma_x$$

$$[A, B] = i a (b_1 - b_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle 1|[A, B]|1\rangle = 0 \quad \text{e' vero per cui } \underbrace{\langle \Delta A^2 \rangle}_{0} \underbrace{\langle \Delta B^2 \rangle}_{0} \geq \frac{1}{4} \underbrace{|[A, B]|^2}_{0}$$