Suggerimenti per la soluzione del
II Parziale di Istituzioni di Fisica Teorica
L'Aquila 18 Dicembre 2017

1) Una particella si muove in un potenziale $V(|r|)$.

   - L^2 ed L_z sono quantità conservate?

   - Se al potenziale viene aggiunto un termine $-\lambda z\ L_z$ sarà ancora conservato?

   Il potenziale è centrale dunque, dipendendo solo da $|\vec{r}|$ è invariante per rotazione e quindi commuta con gli operatori che sono i generatori infinitesimi delle rotazioni. Bisogna domandarsi se il temine aggiuntivo è o no invariante per rotazione, e nel caso, se fosse invariante sotto una *particolare* rotazione...

2) Lo stato di un atomo di idrogeno è:

$$|\Psi>= \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0,0> + \frac{1}{\sqrt{15}}|2,0,0> + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}|2,1,0> + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}|2,1,1> + \frac{2}{\sqrt{15}}|2,1,-1>$$

   con $|n,\ell,m>$ autostati simultanei della energia di L^2 ed L_z.

   - Quali valori posso ottenere in una misura di energia e con quali probabilità?

   - Quali valori posso ottenere in una misura di L^2

   L'energia dell'atomo di idrogeno in assenza di qualsiasi termine perturbativo dipoende solo dal numero quantico n...

3) un sistema di spin 1/2 al tempo $t = 0$ si trova in uno stato per cui con ugual probabilità ottengo i valori $\pm\hbar/2$ in una misura di s_z

   - Scrivere lo stato normalizzato corrispondente

   Se lo stato evolve in accordo con l'Hamiltoniano

$$H = g\sigma_x$$

   - Dopo quanto tempo la probabilità di ottenere $\hbar/2$ in una misura della componente z dello spin ritorna ad essere la stessa osservata a $t = 0$?

   Si scriva lo stato come combinazione lineare dei sue autostati di σ_z, non si dimentichi una fase relativa. L'evoluzione temporale è particolarmente semplice poichè è la somma dell'identità (moltiplicata per una funzione oscillante) e di σ_x (sempre moltiplicata per una funzione oscillante) la cui azione sullo stato di spin è lo spin-flip...

4) Consideriamo la seguente funzione d'onda relativa alla parte spaziale di due particelle in uno spazio tridimensionale

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A \exp(-(r_1^2 + r_2^2)/2\sigma^2)$$

   con A costante di normalizzazione ed $r_{1,2} = |\vec{r}_{1,2}|$.

   - Se le due particelle sono fermioni di spin 1/2 quale deve essere la parte spinoriale consentita dalle proprietà di simmetria della funzione d'onda?

   - Se le due particelle sono bosoni senza spin la funzione d'onda in questione è una funzione d'onda ammissibile?

- Deteminare la costante A.

`La funzione è evidentemente simmetrica per scambio e quindi la parte spinoriale per i fermioni dovrà essere antisimmetrica, per i bosoni senza spin è una funzione ammissibi La normalizzazione si calcola riconoscendo la funzione come prodotto di due gaussiane tridimensionali...`

5) Un oscillatore armonico di massa m e frequenza propria ω è perturbato da un termine

$$V = -\lambda x^2$$

con $\lambda > 0$.

- Il termine perturbativo commuta con l'Hamiltoniano imperturbato?

- Determinare una possibile costante adimensionale per una teoria delle perturbazioni.

- Calcolare le correzioni al primo ordine alle energie dei vari livelli imperturbati e confrontare il risultato con la soluzione esatta.

- (facoltativo) scrivere la correzione al primo ordine per lo stato fondamentale.

Il termine pertubativo commuta con il potenziale imperturbato ma non con la parte cineti Esprimendo la perturbazione in termini degli operatori *adimensionali* a ed $a^\dagger$ si evidenzia l'energia associata al termine pertubativo, il rapporto fra questa energia e $\hbar\omega$ fornisc una costante d'accoppiamento adimensionale per il problema. La stessa espressione aiuta nel calcolo delle correzioni alle energie al primo ordine. La soluzione esatta è banale se si considera che il termine pertubativo aggiunto al potenziale quandratico è ancora un termine quadratico quindi saremo in presenza di un oscillatore armonico con diversa frequenza...