

Teorema H

$$x \quad f(1)f(2) = f(1')f(2') \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \text{ dall'equazione}$$

$$x \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow f(1)f(2) = f(1')f(2') \Rightarrow \text{Teorema H}$$

Se $f(p,t)$ soluzione di Boltzmann $\Rightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0$

con $\frac{dH}{dt} = 0$ all'equilibrio dove $f(p_1)f(p_2) = f(p_1')f(p_2')$

ed

$$H(t) = \int d^3p \quad f(p,t) \ln f(p,t)$$

—————>

Cominciando con

$$\frac{dH}{dt} = \int d^3p \quad \dot{f}(p) (\ln f(p) + 1) =$$

$$a) = \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_1' d^3p_2' [f(1')f(2') - f(1)f(2)] w_{12 \rightarrow 12'} (\ln f(1) + 1)$$

Scambio 1 con 2

$$b) = \int d^3p_2 d^3p_1 d^3p_1' d^3p_2' [f(1')f(2') - f(1)f(2)] w_{12' \rightarrow 21} (\ln f(2) + 1)$$

moltiplico le 2 x 1/2 e sommo

$$\frac{dH}{dt} = \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_1' d^3p_2' [f(1')f(2') - f(1)f(2)] \frac{1}{2} \{ w_{12 \rightarrow 12'} (\ln f(1) + 1) + w_{12' \rightarrow 21} (\ln f(2) + 1) \}$$

per parti che tutte uguali integrando sugli impulsi

$$w_{12' \rightarrow 12} = w_{12 \rightarrow 21} \quad \text{basta controllare la misura dentro la classe}$$

$$\int d^3p_2 d^3p_1' d^3p_2' w_{12 \rightarrow 12'} [f(1')f(2') - f(1)f(2)] = \int d^3p_2 d^3p_1' \underbrace{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|}_{\text{se scambio 1 con 2 non varia!}} [f(1')f(2') - f(1)f(2)]$$

adesso scambio prodotti e uscenti

$$\frac{dH}{dt} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' [f(\mathbf{r})f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}'')f(\mathbf{r}''')] \frac{1}{2} W_{\mathbf{r}''\mathbf{r}'''} (\ln f(\mathbf{r}) + 1 + \ln f(\mathbf{r}') + 1)$$

moltiplico le 2 espressioni per $1/2$ e sommo

$$\frac{dH}{dt} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' [f(\mathbf{r})f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}'')f(\mathbf{r}''')] \frac{1}{4} W_{\mathbf{r}''\mathbf{r}'''} (\ln f(\mathbf{r}) + \ln f(\mathbf{r}') - \ln f(\mathbf{r}'') - \ln f(\mathbf{r}'''))$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' W_{\mathbf{r}''\mathbf{r}'''} \underbrace{[f(\mathbf{r})f(\mathbf{r}')]}_x \underbrace{[-f(\mathbf{r}'')f(\mathbf{r}''')]}_y (\ln f(\mathbf{r})f(\mathbf{r}') - \ln f(\mathbf{r}'')f(\mathbf{r}'''))$$

$$-(x-y)(\ln x - \ln y) = f(x,y) \quad \text{con} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) \leq 0$$

da questo $\frac{dH}{dt} \leq 0$ ma se $\dot{f} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$ equilibrio

in questo caso essendo $W > 0$ abbiamo

$$(x-y)(\ln x - \ln y) = 0 \quad \text{che può avvenire quando}$$

$$x = y$$

$$f(\mathbf{r})f(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}'')f(\mathbf{r}''')$$

inoltre in questo caso abbiamo

$$\ln f(\mathbf{r}) + \ln f(\mathbf{r}') = \ln f(\mathbf{r}'') + \ln f(\mathbf{r}''')$$

$\ln f(\mathbf{r})$ è una funzione scalare conservata nell'urto
gli invarianti scalari nell'urtosono l'energia

$$\text{ovvero} \quad p_1^2 + p_2^2 = p_1'^2 + p_2'^2 \quad \text{per particelle identiche}$$

Dimostrare $\ln f(\vec{p}) = A - B \vec{p}^2$ nel sotto retto in
 costante indip. $\vec{p}$ ci le moto totale del baricentro ha velocità zero!

$f(\vec{p}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^3 e^{-\frac{\vec{p}^2}{2\sigma^2}}$ altre vrt $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \vec{p}_0$
 se voglio la normalizzazione ad 1

se de f. m. s. c.

$$g^{(1)} = \int dp_2 \dots dp_N dq_2 \dots dq_N g^{(N)}$$

se non voluta a 1 la $g^{(N)}$ deve normalizzare ad 1 la $g^{(1)}$

in questo caso

$U = \left\langle \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} \right\rangle$ media ds insieme ma posso anche definire

all'equilibrio

$\langle T \rangle = \left\langle \sum_i \frac{p_i^2}{2m} \right\rangle$
 anch' in pres. di inter.

$$U = N \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = N \frac{1}{2m} \int d^3p f(\vec{p}) \vec{p}^2 =$$

$$= N \frac{1}{2m} \int d^3p f(p) (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{3N}{2m} \sigma^2$$

se deve valere la formula m. del gas perfetto

$$U = \frac{3}{2} NKT \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = m K_B T}$$

Nota che ho rimosso le interazioni che sono necessarie per far andare all'equilibrio il gas perfetto

Nel caso classico però è vero comunque che

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} NKT$$

... Se aggiungo le interazioni

$$U = \left\langle \sum_i \frac{p_i^2}{2m} \right\rangle + \left\langle \underbrace{\sum_{i,j} V(q_i - q_j)}_{\Delta U} \right\rangle$$

devo supporre che anche in presenza di interazioni

$$\left\langle \sum_i \frac{p_i^2}{2m} \right\rangle = \frac{3}{2} N k_B T \quad \text{il che è vero all'equilibrio}$$

Ho però un termine aggiuntivo in U .

La funzione H all'equilibrio

$$H_{eq} = \int d^3p \frac{e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{\mathcal{N}} \left(-\beta \frac{p^2}{2m} - \ln \mathcal{N} \right)$$

$$H_{eq} = -\beta \frac{\langle T \rangle}{N} - \ln \mathcal{N} \quad \text{normalizzato a 1}$$

$$\frac{\langle T \rangle}{N} + \frac{H_{eq}}{\beta} = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{N} \quad \mathcal{N} = \left(2\pi \frac{m}{\beta} \right)^{3/2} \quad \text{funzione di partizione per particelle "punte cinetiche"}$$

$Z_1 = \frac{V}{h^3} \left(2\pi \frac{m}{\beta} \right)^{3/2}$

Ho anche $F = U - TS$ e se definisco una

all'energia totale K e aggiungo che

$$F = F_K + \Delta F \quad \leftarrow \langle V \rangle$$

$$U = \langle T \rangle + \Delta U \rightarrow F_K + \Delta F = \langle T \rangle + \Delta U - TS_K - T\Delta S$$

$$S = S_K + \Delta S \quad \text{posso definire}$$

$$F_K = \langle T \rangle - TS_K \quad \text{è parte cinetica}$$

$$\Delta F = \Delta U - T\Delta S \quad \text{energia potenziale eccetera}$$

$$\frac{H_{eq}}{\beta} = -\frac{T S_K}{N}$$

$$\boxed{H_{eq} = -\frac{S_K}{k_B N}} \quad \leftarrow \text{parte cinetica della entropia}$$