

Rappresentazione d'interazione

①

nella rappresentazione di Schrödinger

- lo stato evolve nel tempo $|t, t\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} |t, 0\rangle$
- gli operatori non evolvono $\dot{O}_S = 0$

nella rappresentazione di Heisenberg

- lo stato non evolve nel tempo $|t, t\rangle_H = |t, 0\rangle$
- gli operatori evolvono nel tempo $O_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} O_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$

la rappresentazione di Interazione è intermedia fra le 2 ed è adatta ai problemi perturbativi anche dipendenti esplicitamente dal tempo

$H = H_0 + V$ V può anche dipendere dal tempo
ma H_0 no

Schrödinger $|t\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} |t\rangle$

interazione

~~$|t\rangle_I = e^{-\frac{i}{\hbar} V t} |t\rangle$~~

$|t\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |t\rangle_S$

Heisenberg $|t\rangle_H = |t\rangle$

- Per Hamiltoniane che non dipendono dal tempo (2)

$$| \psi \rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} (H_0 + V) t} | \psi \rangle$$

$$[H_0, V] = 0$$

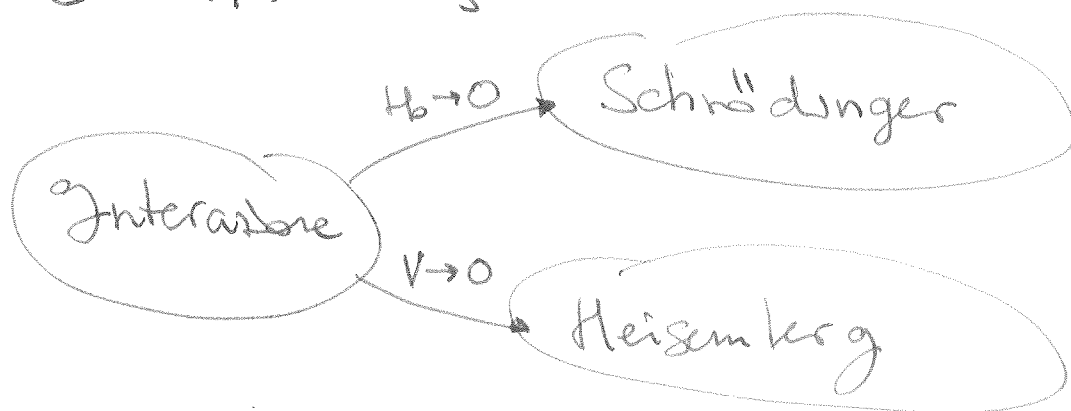
$$| \psi \rangle_I = e^{-\frac{i}{\hbar} V t} | \psi \rangle$$

- Nel limite $V \rightarrow 0$

$$| \psi \rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi \rangle = | \psi \rangle \quad | \psi \rangle_I = | \psi \rangle_H$$

- Nel limite $H_0 \rightarrow 0$

$$| \psi \rangle_I = e^{-\frac{i}{\hbar} V t} | \psi \rangle = | \psi \rangle_S$$



Operatori in rappr. Interazione

Affinche un generico elemento di matrice

$\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$ sia lo stesso in ogni rappresentazione
abbiamo che

$$\underbrace{\langle \psi | e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \hat{A} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi \rangle}_{\hat{A}_H} = \underbrace{\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle}_{\hat{A}_S}$$

$$\langle \Phi(t) | \hat{A} | \Phi(t) \rangle_S = \langle \Phi(t) | \hat{A}_I | \Phi(t) \rangle_I$$

(3)

$$\text{ma } |\psi\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi\rangle_I$$

$$\hat{A}_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \hat{A}_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$$

↑
dipende dal tempo anche quando A_S non ci dipende esplicit.

Evoluzione in rappresentazione Intermedia

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi\rangle_S = \\ &= -H_0 e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi\rangle_S + e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_S) = \\ &= -H_0 |\psi\rangle_I + e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} (\hat{H}_0 + \hat{V}) |\psi\rangle_S \end{aligned}$$

↑
commuta
ess cancella
con quello

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I = \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} V e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}}_{V_I} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi\rangle_S}_{|\psi\rangle_I}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I = V_I(t) |\psi\rangle_I$$

↑
equazione Schrödinger in rapp.
d'intermedia.

Espressione dello stato come serie di auto
stati di H_0

4

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$$

↑
auto stati di H_0

l'espressione temporale con H

$$|\psi, t\rangle_S = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |n\rangle$$

$$c_n = \langle n | \psi \rangle$$

Nella rappresentazione di interazione

$$\underset{\langle n |}{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}} |\psi, t\rangle_I = \underset{\langle n |}{\hat{V}_I(t)} \underset{\sum_m |m\rangle \langle m|}{|\psi, t\rangle_I}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle n | \psi, t \rangle_I = \sum_m \langle n | \hat{V}_I(t) | m \rangle \langle m | \psi, t \rangle_I$$

adesso ponga

$$\langle n | \psi, t \rangle_I = C_n(t)$$

← ampiezze di probabilità
nella rappresentazione

lo modo di

$$|\psi, t\rangle_I = \sum_n C_n(t) |n\rangle$$

in questo modo

$$|\psi, t\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi, t\rangle_I = \sum_n C_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n\rangle$$

per $t=0$ $C_n(0) = \langle n | \psi \rangle$ quello sopra

(5)

$$i\hbar \dot{C}_n(t) = \sum_{h,m} e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} \langle n | V_S | m \rangle C_m(t)$$

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$

Con $C_n(0) = \langle n | \psi \rangle$

Ed è notare che le $C_n(t)$ sono legate alle analoghe in rappresentazione di Schrödinger da un fattore di fase

$$C_n(t) = \langle n | \psi, t \rangle_I = \langle n | e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi, t \rangle_S = e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} \langle n | \psi, t \rangle_S$$

dunque l'ampiezza di probabilità di trovare

lo stato $|n\rangle$ all'istante t è

$$C_n^{(S)}(t) = \langle n | \psi, t \rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} C_n(t)$$

La probabilità è la stessa

$$|C_n^{(S)}(t)|^2 = |C_n(t)|^2$$

Serie di Dyson

partenza dall'eq. di Schröd. in rapp. interazione

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |4, t\rangle_I = V_I(t) |4, t\rangle_I$$

integrando nel tempo formalmente

$$i\hbar [|4, t\rangle_I - |4, 0\rangle_I] = \int_0^t dt' V_I(t') |4, t'\rangle_I$$

formalmente

$$|4, t\rangle_I = |4, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |4, t'\rangle_I$$

equazione integrale simile a Lipmann-Schwinger
dipendente dal tempo

itero formalmente

$$|4, t\rangle_I^{(1)} = |4, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \left(\int_0^t dt' V_I(t') \right) |4, 0\rangle$$

$$\begin{aligned} |4, t\rangle_I^{(2)} &= |4, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |4, t\rangle_I^{(1)} = \\ &= |4, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \left(\int_0^t dt' V_I(t') \right) |4, 0\rangle - \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' V_I(t') \int_0^{t'} dt'' V_I(t'') |4, 0\rangle \end{aligned}$$

$$|\psi, t\rangle_I = \left[\sum_0^\infty (-\frac{i}{\hbar})^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) \right] |\psi, 0\rangle$$

Schwed
Dyson

evoluzione
temporale in rappresentazione
di interazione $U_I(t, 0)$

arrivo
int

parto
da zero

Calcolando $U_I(t, 0)$ possiamo determinare le ampiezze di
transizione

Se suppongo che a $t=0$ $|\psi, 0\rangle = |n\rangle$
auto stato dell' Ham Imperturbato
l'ampiezza di transizione in rappo di
interazione è

$$\langle m | \psi, t \rangle_I = \langle m | U_I(t, 0) | n \rangle \quad n \rightarrow m$$

Ma è chiaro che lo stato nello rappresentazione
di Schrödinger

$$|\psi, t\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} U_I(t, 0) |\psi, 0\rangle$$

$U_S(t, 0)$ evoluzione
temporale