

Interaction Representation

①

Schrödinger representation (better picture)

states evolve

(for energy conserving systems) $|\psi, t\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi, 0\rangle$

operators that do not explicitly depend on time (counter example density matrix) do not evolve

$$\hat{A}_S(t) = \hat{A}_S(0)$$

Heisenberg's picture

States do not evolve

$$|\psi, t\rangle_H = |\psi, 0\rangle_H$$

operators evolve

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}]$$

for energy conserving systems $\hat{A}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{A}(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$

such that

$$\langle \psi, t | \hat{A}(0) | \psi, t \rangle_S = \langle \psi | \hat{A}_H(t) | \psi \rangle_H$$

Now suppose that we have.

(2)

$$H = H_0 + V(t)$$

↑ ↖ time dependent
Energy conserving

and define the Interaction picture as

$$| \psi, t \rangle_I \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi, t \rangle_S$$

now if $\hat{V}(t)$ then there exists unitary time evolution

$$| \psi, t \rangle_S = U(t, 0) | \psi, 0 \rangle^* \quad U^\dagger = U^{-1}$$

such as

$$U(t, 0) = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_I(t')} | \psi, 0 \rangle$$

* **S matrix**

↳ see below

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi, t \rangle = \hat{H} | \psi, t \rangle$$

then Interaction representation interpolates between Schrödinger & Heisenberg

• as $V \rightarrow 0$ Interaction = Heisenberg

$$| \psi, t \rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi, 0 \rangle \quad | \psi, t \rangle_I = | \psi, 0 \rangle$$

the state in interaction representation do not evolve

• as $H_0 \rightarrow 0$ Interaction = Schrödinger

$$| \psi, t \rangle_I = U(t, 0) | \psi, 0 \rangle = | \psi, t \rangle_S$$

the state evolve with $V(t)$

Operators

$$\langle \psi, t | \hat{A} | \psi, t \rangle_S = \langle \psi, t | \hat{A}_I(t) | \psi, t \rangle_I$$

$$\downarrow$$

$$\langle \psi, t | e^{+\frac{i}{\hbar} H_0 t} \hat{A}_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi, t \rangle_S \quad \text{therefore}$$

$$\boxed{\hat{A}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \hat{A}_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}}$$

State evolution

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle_I &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_0 |\psi, t\rangle_I + e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle_S \right) \\ &= -H_0 |\psi, t\rangle_I + e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \underbrace{(H_0 + V)}_{\text{commutes}} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi, t\rangle_I \end{aligned}$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle_I = V_I(t) |\psi, t\rangle_I}$$

Here enters also H_0 !!

formally depends only on V

Serie di Dyson

passando dall'eq. di Schröd. in rapp. interazione

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle_I = V_I(t) |\psi, t\rangle_I$$

integrando nel tempo formalmente

$$i\hbar [|\psi, t\rangle_I - |\psi, 0\rangle_I] = \int_0^t dt' V_I(t') |\psi, t'\rangle_I$$

formalmente

$$|\psi, t\rangle_I = |\psi, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |\psi, t'\rangle_I$$

esprime integrale simile a Lippmann-Schwinger
dipendente dal tempo

itero formalmente

$$|\psi, t\rangle_I^{(1)} = |\psi, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \left(\int_0^t dt' V_I(t') \right) |\psi, 0\rangle$$

$$\begin{aligned} |\psi, t\rangle_I^{(2)} &= |\psi, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |\psi, t\rangle_I^{(1)} = \\ &= |\psi, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \left(\int_0^t dt' V_I(t') \right) |\psi, 0\rangle - \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' V_I(t') \int_0^{t'} dt'' V_I(t'') |\psi, 0\rangle \end{aligned}$$

$$| \psi, t \rangle_I = \left[\sum_0^\infty (-\frac{i}{\hbar})^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) \right] | \psi, 0 \rangle$$

$t_1 > t_2 > t_3 \dots > t_n$

Serie di
Dyson

evoluzione
temporale in rappresentazione
di interazione

$U_I(t, 0)$
 arrivo
 da zero

Calcolando $U_I(t, 0)$ possiamo determinare le ampiezze di
transizione

Se suppongo che a $t=0$ $| \psi, 0 \rangle = | n \rangle$
 auto stato dell' Ham Imperturbato
 l'ampiezza di transizione in rapp di
 interazione è

$$\langle m | \psi, t \rangle_I = \langle m | U_I(t, 0) | n \rangle \quad n \rightarrow m$$

Ma è chiaro che lo stato nello rappresentazione
 di Schrödinger

$$| \psi, t \rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} U_I(t, 0) | \psi, 0 \rangle$$

$U_S(t, 0)$ evoluzione
temporale

Risom mafore formale delle serie di Dyson T-ordinamento tempo euclideo

Voglio dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) \dots V_I(t_n)$$

assomiglia ad un'espressione che si trova con
in $\frac{1}{n!}$ e tutti gli integrali estesi da

0 a t

Se fosse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) \dots V_I(t_n) =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt V_I(t)}$$

per questo definisco

$$T V(t_1) V(t_2) = \begin{cases} V(t_1) V(t_2) & t_1 > t_2 \\ V(t_2) V(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$

e lo posso generalizzare a n ordinamenti tutti gli
operatori per modo che tutti gli argomenti sono
ordinati in senso decrescente andando a dx

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_n T V_I(t_1) \dots V_I(t_n)$$

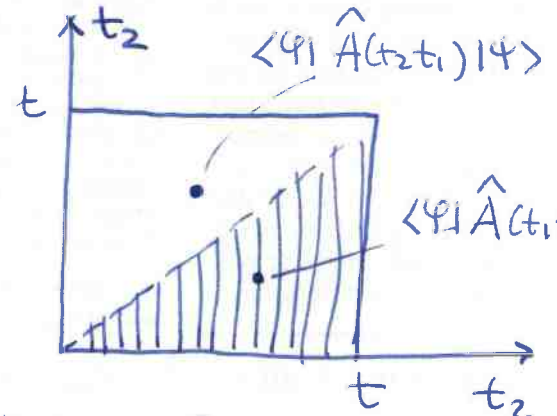
lo posso dimostrare per 2 operatori

lo posso dimostrare per $\forall$ elementi di matrice fra 2 stati generici $\langle \varphi | T V(t_1) V(t_2) | \varphi \rangle$ in questo modo è una frase

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 T V_I(t_1) V_I(t_2)$$

$T V_I(t_1) V_I(t_2)$ è un operatore simmetrico che sc. dei tempi

$$T V_I(t_1) V_I(t_2) = T V_I(t_2) V_I(t_1) = \hat{A}(t_1, t_2) = \hat{A}(t_2, t_1)$$

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 A(t_1, t_2) = 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1, t_2)$$


da cui lo prova per $n=2$

per n variabili ho $n!$ permutazioni dei tempi $t_1, t_2, \dots, t_n$ che lasciano invariato l'operatore

$$\text{Simmetrico} \quad A(t_1, t_2, \dots, t_n) = T V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)$$

$$|\varphi, t\rangle_I = \underbrace{\sum_0^\infty \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_n T V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)}_{T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t')}} |\varphi, 0\rangle$$

$$|\psi, t\rangle_s = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \boxed{T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t')}} |\psi, 0\rangle$$

S matrix

* $U_S(t, 0)$ operatore di evoluzione temporale

S matrix if $t=0 \rightarrow -\infty$
Scattering theory

- Così part. canon.

$$\bullet [H_0, V] = 0$$

$$V_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} V_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = V_S$$

se V è indep. dal tempo

$$\int_0^t dt' V_I(t') = \left(\int_0^t dt' \right) V_S = \hat{V}_S t$$

$$|\psi\rangle_s(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \left(T e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{V} t} \right) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{V} t} = e^{-\frac{i}{\hbar} (\hat{H}_0 + \hat{V}) t}$$

non c'è nulla da ordinare!

• V indipendente dal tempo

$$U_S(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

$$U_S(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t'} V e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t'} dt'}$$

dipende dal tempo

$$e^{-\frac{i}{\hbar} (H_0 + V) t} \neq e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} V t}$$

Espressione al 2° ordine

$$U_S(t,0) = \mathbb{1} - \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' T V_I(t') + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' T V_I(t') V_I(t'')$$

la ampiezza di transizione al 2° ordine:
ha il termine

$$C_m^{(2)}(t) = \left(-\frac{1}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{2!} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \underbrace{\langle m | T V_I(t') V_I(t'') | n \rangle}_{\text{stato finale}} \underbrace{\langle n |}_{\text{stato iniziale}}$$

Scattering theory

$$| \psi, t \rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_0)} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} (t, t_0) | \psi, t_0 \rangle$$

eigenstate of H_0
say $| \kappa \rangle$

$$\langle \kappa' | \psi, t \rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\kappa'} t} \langle \kappa' | S | \kappa \rangle$$

transition probability

$$P_{\kappa \rightarrow \kappa'} = | \langle \kappa' | S | \kappa \rangle |^2$$