

Risommazione formale delle serie di Dyson T-ordinamento tempo euclideo

Voglio dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) \dots V_I(t_n)$$

assomigli ad un'espressione che si trova
in $\frac{1}{n!}$ e tutti gli integrali estesi da

0 a t

Se fosse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) \dots V_I(t_n) =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt V_I(t)}$$

per questo definisco

$$T V(t_1) V(t_2) = \begin{cases} V(t_1) V(t_2) & t_1 > t_2 \\ V(t_2) V(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$

e lo posso generalizzare a n ordinamenti tutti gli
operatori per modo che tutti gli argomenti sono
ordinati in senso decrescente andando a dx

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_n T V_I(t_1) \dots V_I(t_n)$$

Proviamolo per 2 operatori

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 T V_I(t_1) V_I(t_2)$$

$T V_I(t_1) V_I(t_2)$ è un operatore simmetrico nello sc. dei tempi

$$T V_I(t_1) V_I(t_2) = T V_I(t_2) V_I(t_1) = A(t_1, t_2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1, t_2) \\ = 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1, t_2) \end{aligned}$$

da cui la prova per $n=2$

per n variabili ho $n!$ permutazioni dei tempi $t_1, t_2, \dots, t_n$ che lasciano invariato l'operatore

$$\text{Simmetrico } A(t_1, t_2, \dots, t_n) = T V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)$$

$$| \psi, t \rangle_I = \underbrace{\sum_0^\infty \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_n T V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)}_{T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t')}} | \psi, 0 \rangle$$

$$|\psi, t\rangle_S = \left(e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \mathcal{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t')} \right) |\psi, 0\rangle$$

$U_S(t, 0)$ operatore di
evoluzione temporale

- Casi particolari

- $[H_0, V] = 0$

$$V_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} V_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = V_S$$

se V è indep. dal tempo

$$\int_0^t dt' V_I(t') = \left(\int_0^t dt' \right) V_S = \hat{V}_S t$$

$$|\psi\rangle_S(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \mathcal{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{V} t} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{V} t} = e^{-\frac{i}{\hbar} (\hat{H}_0 + \hat{V}) t}$$

non c'è nulla da ordinare!

- V indipendente dal tempo

$$U_S(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

$$U_S(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \mathcal{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t'} V e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t'} dt'}$$

dipende dal tempo

$$e^{-\frac{i}{\hbar} (H_0 + V) t} \neq e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} V t}$$

Espressione al 2° ordine

$$U_S(t,0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' T V_I(t') + \frac{(-i)^2}{2! \hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' T V_I(t') V_I(t'')$$

la ampiezza di transizione al 2° ordine:

ha il termine

$$C_m^{(2)}(t) = \frac{(-i)^2}{2! \hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \underbrace{\langle m | T V_I(t') V_I(t'') | n \rangle}_{\substack{\text{stato} \\ \text{finale}}} \underbrace{\quad}_{\substack{\text{stato} \\ \text{iniziale}}}$$