

Lezione & Dissipazione nei Sistemi Quantistici

①

Nei sistemi classici l'evoluzione della
 $\rho^{(c)}$ produce la dissipazione

$$\frac{\partial \rho^{(c)}}{\partial t} + \{ \rho^{(c)}, H_S^{(c)} \} = - \text{tr}_{(\bar{c})} \{ \rho, H_{\text{int}}^{(c, \bar{c})} \}$$

queste ultime equazioni di Boltzmann
si traducono in

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{collision}}$$

che produce il rilassamento verso l'equilibrio

Un sistema dove $S \ll N$ isolato può essere
visto come un sistema chiuso in contatto
con un bagno esterno

(C) (C̄)
SIST BAGNO

$$(H_S + H_B + H_{SB} = H) \quad \begin{array}{l} \text{— Conservate} \\ \text{non conservate} \end{array}$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}]$$

equazione di evoluzione
della Matrice Densità
Schrödinger

$$\hat{\rho}_S = \text{tr}_B \hat{\rho}$$

↑
sulle variabili del bagno

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \text{tr}_B [\hat{\rho}, H] = -\frac{i}{\hbar} \text{tr}_B [\hat{\rho}, H_S + H_B + H_{SB}]$$

(a) (b) (c)

a) $\text{tr}_B [\hat{\rho}, H_S] = [\text{tr}_B \hat{\rho}, H_S] = [\rho_S, H_S]$

b) $\text{tr}_B [\hat{\rho}, H_B] = \sum_B \langle B | \hat{\rho} \hat{H}_B | B \rangle - \langle B | \hat{H}_B \hat{\rho} | B \rangle$

Nel sottosistema del bagno l'identità è

$$\mathbb{1}_B = \sum_B |B\rangle \langle B| \quad \text{dunque}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}_B [\hat{\rho}, H_B] &= \sum_{BB'} \langle B | \hat{\rho} | B' \rangle \langle B' | H_B | B \rangle - \\ &\quad - \sum_{BB'} \langle B | H_B | B' \rangle \langle B' | \hat{\rho} | B \rangle \end{aligned}$$

(b1) (b2)

adesso nota che

$\langle B' | H_B | B \rangle$ è un numero (complesso)

mentre non così

$\langle B | \hat{\rho} | B' \rangle$ che resta un operatore nel sottosistema del sistema

se però nel primo (b2) scambio $B \leftrightarrow B'$ che comunque sono indici sommati otteniamo

$$\text{tr} [\hat{\rho}, H_B] = 0$$

Come nel caso classico dove

(3)

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_S, \hat{H}_S] - \frac{i}{\hbar} \text{tr}_B [\hat{\rho}_S, H_{SB}]$$

se $H_{SB} = 0$ abbiamo un'evoluzione liouviliana anche per ρ_S per cui se $H_{SB} = 0$

$$\rho_S(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_S t} \rho_S(0) e^{\frac{i}{\hbar} H_S t} \quad H_{SB} = 0$$

dunque non c'è ne dissipazione ($E_S = \text{cost}$)
ne decoerenza in futuro poiché da
 uno stato puro parte sistema

$$\hat{\rho}_S(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_S t} |\psi_S\rangle \langle \psi_S| e^{\frac{i}{\hbar} H_S t} = |\psi_S(t)\rangle \langle \psi_S(t)|$$

c'è ancora uno stato puro per il sistema
 esso può espandersi secondo una base completa
 per il sistema

$$\hat{\rho}_S(t) = \sum_{n,m} a_n a_m^* e^{-\frac{i}{\hbar} (E_n^{(S)} - E_m^{(S)}) t} |n\rangle \langle m|$$

è generalizzabile a sistemi con più gradi di libertà

per il sistema se

$$\langle n | \hat{\rho}_S | m \rangle = a_n a_m^* e^{-\frac{i}{\hbar} (E_n^{(S)} - E_m^{(S)}) t}$$

osservando

possa calcolare la PUREZZA dello stato

(4)

$$\text{tr } \hat{\rho}^2 = P$$

per uno stato puro $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$

$$\text{tr } \underbrace{|4\rangle\langle 4|}_I \underbrace{|4\rangle\langle 4|}_I = \text{tr } \hat{\rho} = 1$$

per una miscela di stati

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |i\rangle\langle i|$$

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{ij} P_i P_j |i\rangle\langle i| J \rangle \langle J| \rangle \langle J| \rangle \quad (|i\rangle \text{ e } |J\rangle \text{ non necessariamente } \perp)$$

$$\text{tr } \hat{\rho}^2 = \sum_{i,j} P_i P_j \langle i| \langle i| J \rangle \langle J| i \rangle$$

dove $\{|i\rangle\}$ è un insieme completo

$$\text{tr } \hat{\rho}^2 = \sum_{ij} P_i P_j \langle J| i \rangle \langle i| J \rangle = \left| \sum_i P_i \langle i| J \rangle \right|^2$$

$$\sum_{ij} P_i P_j |\langle i| J \rangle|^2 \leq \sum_{ij} P_i P_j = (\sum_i P_i)^2 = 1 \quad \text{perché } |\langle i| J \rangle|^2 \leq 1$$

stato normalizzato - Dato per il teorema
a 1 più lo stato è puro

$$\frac{d}{dt} P = \text{tr}(\dot{\rho} \rho + \rho \dot{\rho}) = \text{tr} \{ \dot{\rho}, \rho \}$$

per una evoluzione unitaria

$$\frac{d}{dt} P = \text{tr} \left\{ \rho, -\frac{i}{\hbar} [\rho, H] \right\} =$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \text{tr} (\rho^2 H - \rho H \rho + \rho H \rho - H \rho^2) \quad \text{ma } \text{tr} AB = \text{tr} BA$$

e quindi $\frac{dP}{dt} = 0$

se considerano la purezza del sistema $P_S = \frac{1}{\text{tr} P_S} P_S^2$

$$\frac{dP_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \text{tr}_S \{ P_S, \text{tr}_B [S, H_{SB}] \} =$$

(5)

$$= -\frac{i}{\hbar} \text{tr}_S \left(P_S \text{tr}_B P_H H_{SB} - P_S \text{tr}_B H_{SB} P + \right. \\ \left. + \text{tr}_B P_H H_{SB} P_S - \text{tr}_B H_{SB} P P_S \right) =$$

$$= -\frac{2i}{\hbar} \text{tr}_S \left(P_S \text{tr}_B P_H H_{SB} - P_S \text{tr}_B H_{SB} P \right)$$

- Notare che se assumessi (anche in presenza di H_{SB}) che $P = P^{(S)} \otimes P^{(B)}$ $P_S = P^{(S)}$ ($\text{tr}_B P^{(B)} = 1$)

allora al 2° membro avrei

$$\text{tr}_S P_S^2 \text{tr}_B P^{(B)} H_{SB} - P_S (\text{tr}_B P^{(B)} H_{SB}) P_S = 0$$

per la proprietà ciclica della traccia

- Dunque per il rilassamento della purezza e quindi per la decoerenza è necessario che nel tempo $P \neq P^{(S)} \otimes P^{(B)}$

- Notare che essendo $\hat{P}$ Hermitiana $P = \sum_i P_i |i\rangle\langle i| = P^\dagger$ ed H_{SB} anche Hermitiana allora $[P, H_{SB}]$ è anti-Hermitiana ed $i[P, H_{SB}]$ è Hermitiana dunque ha autovalori reali