

Capitolo 1

La matrice densità

1.1 Un rapido richiamo di meccanica quantistica

In Meccanica Quantistica, un sistema è completamente determinato una volta noto il suo stato ad un tempo iniziale. L'equazione di Schroedinger ne descrive l'evoluzione *deterministica*. In altri termini, la conoscenza dello stato rappresenta tutta l'informazione che si può avere sul sistema.

Elenchiamo brevemente alcuni concetti di meccanica quantistica che ci saranno utili nel seguito

1. La dinamica dello stato è data dall'equazione di Schroedinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle. \quad (1.1)$$

2. Dato lo stato iniziale $|\psi(0)\rangle$, il suo evoluto si ottiene applicando ad esso un operatore unitario (*operatore di evoluzione*)

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle, \quad (1.2)$$

che si ottiene da (1.1). In particolare, per H indipendente dal tempo,

$$U(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}. \quad (1.3)$$

3. Gli stati si intendono normalizzati a 1:

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1. \quad (1.4)$$

L'evoluzione, così come l'applicazione di una qualsiasi trasformazione unitaria, conserva la norma.

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)| \underbrace{U^\dagger(t)U(t)}_1 |\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1. \quad (1.5)$$

4. Un osservabile A è un operatore hermitiano ($A^\dagger = A$) che agisce sullo spazio di Hilbert dello stato del sistema. Gli autovalori $\{a_j\}$ di A rappresentano i possibili risultati di una misura. Va notato che tali risultati possono non essere noti in maniera deterministica pur essendolo lo stato ¹.

5. Un *proiettore* è un operatore unitario che agisce su un vettore, appartenente ad uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di dimensione N , trasformandolo nella sua componente appartenente ad un sottospazio $\bar{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ di dimensione M . Sia $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle\}$ un set ortonormale di $\mathcal{H}$ e sia $\bar{\mathcal{H}}$ il sottospazio generato dai vettori $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |M\rangle\}$, il proiettore su tale sottospazio è

$$P = \sum_{l=1}^M |l\rangle \langle l|. \quad (1.6)$$

¹La natura *probabilistica* della meccanica quantistica emerge soltanto in termini di un processo di misura, non in termini di stato quantistico e della sua evoluzione.

6. Gli autostati di un'osservabile A formano una base ortonormale $\{|a_j\rangle\}$

$$A|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle, \quad (1.7)$$

e lo stato del sistema può essere rappresentato mediante tale base come

$$|\psi\rangle = \sum_j b_j |a_j\rangle, \quad (1.8)$$

con $b_j = \langle a_j|\psi\rangle$. La probabilità con cui, a seguito di una misura di A , si ottiene come risultato l'autovalore a_j è $p_j = |b_j|^2$. Dopo la misura lo stato $|\psi\rangle$ viene proiettato nella sua componente $|a_j\rangle$.

7. La media di A è il valore medio dei risultati ottenuti dopo un numero elevato di misure.

$$\langle A \rangle = \sum_j a_j p_j = \langle \psi|A|\psi \rangle. \quad (1.9)$$

1.2 Matrice densità per uno stato puro

È possibile associare allo stato di un sistema quantistico il proiettore corrispondente

$$|\psi\rangle \rightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1.10)$$

ρ è detto *matrice densità* dello stato puro $|\psi\rangle$. Descrivere il sistema per mezzo di $|\psi\rangle$ o di ρ in questo caso è del tutto equivalente, tuttavia l'utilizzo del secondo strumento risulta più comodo in alcuni casi, ad esempio nella definizione del processo di misura. Data un'osservabile A e i suoi autostati $\{|a_j\rangle\}$, possiamo introdurre i proiettori su tali stati

$$M_j = |a_j\rangle\langle a_j|, \quad (1.11)$$

quindi la probabilità che, misurando A a partire dallo stato $|\psi\rangle$, il sistema si porti nello stato $|a_j\rangle$ è data da

$$p_j = \text{tr} \{M_j \rho\}. \quad (1.12)$$

Dimostrazione.

$$\text{tr} \{M_j \rho\} = \sum_k \langle a_k|M_j\rho|a_k\rangle = \sum_k \langle a_k|a_j\rangle \langle a_j|\psi\rangle \langle\psi|a_k\rangle = \langle a_j|\psi\rangle \langle\psi|a_j\rangle = p_j.$$

□

Analogamente, possiamo esprimere la media quantistica di A come

$$\langle A \rangle = \text{tr} \{A\rho\}. \quad (1.13)$$

Dimostrazione.

$$\text{tr} \{A\rho\} = \sum_k \langle\psi_k|A|\psi\rangle \langle\psi|\psi_k\rangle,$$

dove $\{|\psi_k\rangle\}$ è una base scelta in modo tale che $|\psi_1\rangle = |\psi\rangle$, in questo modo si ha

$$\text{Tr} [A\rho] = \langle\psi_1|A|\psi\rangle \langle\psi|\psi_1\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle.$$

□

1.3 Matrice densità per ensemble di stati puri

Lo stato di un sistema non è in generale conosciuto perfettamente, per questo motivo occorre introdurre una descrizione statistica. Il sistema non è più descritto da uno stato puro ma da un insieme di stati (non necessariamente ortogonali) a ognuno dei quali è associata una certa probabilità

$$\left. \begin{array}{l} |\psi_1\rangle \rightarrow p_1 \\ |\psi_2\rangle \rightarrow p_2 \\ \vdots \end{array} \right\} \sum_j p_j = 1, \quad (1.14)$$

indichiamo questo insieme con $\{|\psi_j\rangle, p_j\}$. In questo caso non parleremo più di stato puro ma di *stato misto* (oppure *mistura statistica*). Va notato che, per questi stati, esiste una vera e propria ignoranza sul sistema che non deriva dalla sua natura quantistica. Confrontando con il caso precedente:

Stato puro :

- Stato perfettamente noto (massima conoscenza del sistema)
- Indeterminazione quantistica sulla misura

Stato misto :

- Lo stato non è del tutto noto (si introduce un ensemble di stati)
- Indeterminazione sulla misura classica e quantistica

Le medie degli operatori sono ora delle medie sia quantistiche che di ensemble

$$\langle A \rangle = \sum_j p_j \langle \psi_j | A | \psi_j \rangle, \quad (1.15)$$

ossia occorre effettuare una media statistica su tutte le medie quantistiche fatte rispetto a ciascuno stato dell'ensemble.

È possibile adottare un unico formalismo per i sistemi quantistici, sia che essi siano in uno stato puro che in uno stato mescolato, introducendo la definizione più generale di matrice densità. Dato l'ensemble $\{|\psi_j\rangle, p_j\}$ si definisce la sua matrice densità come

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|. \quad (1.16)$$

Ovviamente, tale definizione coincide con la (1.10) nel caso in cui tutte le p_j , tranne una, vanno a zero (ossia quando lo stato diventa puro). Si verifica subito che (1.15) equivale a scrivere

$$\langle A \rangle = \text{tr} \{ \rho A \}. \quad (1.17)$$

così come, analogamente alla (1.12),

$$p(a_k) = \text{tr} \{ \rho M_k \}. \quad (1.18)$$

La matrice densità è quindi un concetto più generale di quello di vettore di stato e permette di descrivere sia stati puri che ensemble di stati con un unico strumento matematico. La matrice densità generalizza il concetto “classico” di densità di probabilità :

$$\langle A \rangle = \int dx p(x) A(x). \quad (1.19)$$

D'ora in avanti, seguendo una tradizione oramai consolidata, utilizzeremo il termine *stato* di un sistema riferendoci, a seconda dei casi, al suo vettore di stato o alla sua matrice densità.

Esercizio 1. Consideriamo un sistema di spin $1/2$ descritto dalle usuali matrici di Pauli. In un caso si abbia lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle, \quad (1.20)$$

ed in un altro caso l'ensemble $\{|0\rangle, p_0 = \frac{3}{4}; |1\rangle, p_1 = \frac{1}{4}\}$

1. Scrivere la matrice densità in entrambi i casi.
2. Calcolare $\langle\sigma_z\rangle$ nei due casi.
3. Calcolare $\langle\sigma_x\rangle$ nei due casi.

1.4 Proprietà della matrice densità

Elenchiamo, di seguito le proprietà che una matrice densità deve possedere:

1. Hermiticità

$$\rho^\dagger = \rho. \quad (1.21)$$

2. Traccia unitaria

$$\text{tr}\{\rho\} = 1. \quad (1.22)$$

Dimostrazione. Scegliamo una base ortonormale $\{|n\rangle\}$

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\rho\} &= \sum_n \langle n|\rho|n\rangle = \\ &= \sum_{n,k} p_k \langle n|\psi_k\rangle \langle\psi_k|n\rangle = \sum_k p_k \langle\psi_k| \left[\sum_n |n\rangle \langle n| \right] |\psi_k\rangle = \\ &= \sum_k p_k \langle\psi_k|\psi_k\rangle = \sum_k p_k = 1. \end{aligned} \quad (1.23)$$

□

3. ρ è non negativa, ossia, per qualsiasi stato $|\chi\rangle$ vale

$$\langle\chi|\rho|\chi\rangle \geq 0. \quad (1.24)$$

Questo equivale a dire che tutti gli autovalori sono positivi e, per la condizione (1.22), compresi tra 0 ed 1.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \langle\chi|\rho|\chi\rangle &= \sum_k p_k \langle\chi|\psi_k\rangle \langle\psi_k|\chi\rangle = \\ &= \sum_k p_k |\langle\chi|\psi_k\rangle|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

inoltre, per dimostrare che gli autovalori sono compresi tra 0 ed 1, consideriamo la trasformazione canonica V che diagonalizza ρ . Per quanto detto sopra, si avrà

$$\langle\chi|VV^\dagger\rho VV^\dagger|\chi\rangle = \langle\chi|V\rho_D V^\dagger|\chi\rangle = \langle\bar{\chi}|\rho_D|\bar{\chi}\rangle \geq 0 \quad (1.26)$$

dove ρ_D è la matrice diagonale

$$\rho_D = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| \quad (1.27)$$

avente autovalori λ_j e autovettori $|j\rangle$.

$$\langle \bar{\chi} | \rho_D | \bar{\chi} \rangle = \sum_j \lambda_j |\langle \bar{\chi} | j \rangle|^2 \geq 0 \quad \forall |\bar{\chi}\rangle \quad (1.28)$$

segue che $\lambda_j \geq 0$. Quindi, essendo $\text{tr}\{\rho\} = \sum_j \lambda_j = 1$, ne deriva che $\lambda_j \leq 1$. $\square$

Le proprietà elencate sono delle condizioni *necessarie e sufficienti*: ogni matrice densità le soddisfa e ogni operatore che le soddisfi può essere interpretato come una matrice densità.

1.4.1 Purity

Definiamo la grandezza

$$P = \text{tr}\{\rho^2\}$$

detta *purity*. Essa gode della proprietà

$$0 \leq P \leq 1, \quad (1.29)$$

dove $P = 1$ si verifica se e solo se ρ è uno stato puro.

Dimostrazione. Ricordando che la traccia è invariante sotto trasformazioni canoniche, mettiamoci nella base in cui ρ è diagonale. In tale base è immediato vedere che

$$P = \sum_j \lambda_j^2, \quad (1.30)$$

con λ_j autovalori di ρ . Per quanto detto precedentemente, tali autovalori sono positivi minori o uguali a uno e la loro somma è uno. Quindi

$$\sum_j \lambda_j^2 \leq 1, \quad (1.31)$$

a meno che solo uno dei λ sia non nullo (e quindi pari a 1), in tal caso lo stato è puro e $P = 1$. $\square$

Inoltre, è immediato rendersi conto che P è minima quando tutti gli autovalori di ρ sono uguali $\lambda_j = 1/N$ (dove N è la dimensione dello spazio di Hilbert dello stato del sistema) e in tal caso si ha $P = 1/N$. Questo caso corrisponde allo stato massimamente mescolato, quello cioè in cui è minima la conoscenza del sistema. Vedremo in seguito che, proprio per questo motivo, stati massimamente mescolati corrispondono ad un massimo dell'entropia. Possiamo quindi fornire degli estremi più precisi per P

$$\frac{1}{N} \leq P \leq 1.$$

La Purity fornisce una misura del grado di purezza di uno stato. Quanto più ρ si avvicina ad 1, tanto più lo stato si avvicina ad uno stato puro (e quindi aumenta la nostra conoscenza dello stato stesso).

Esercizio 2. Calcolare la *purity* della matrice densità

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Evoluzione temporale della matrice densità in un sistema chiuso

Così come la matrice densità è stata definita a partire da proiettori su vettori di stato quantistici, così la sua evoluzione temporale deriva da quella di tali vettori.

$$\rho(t) = \sum_k p_k \langle \psi_k(t) | \psi_k(t) \rangle. \quad (1.33)$$

L'evoluzione in rappresentazione di Schroedinger dà

$$|\psi_k(t)\rangle = U(t) |\psi_k(0)\rangle, \quad (1.34)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) |\psi_k(0)\rangle = H U(t) |\psi_k(0)\rangle, \quad (1.35)$$

da cui segue l'equazione del moto degli operatori di evoluzione temporale

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) = H U(t). \quad (1.36)$$

Analogamente, per la matrice densità

$$\rho(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t), \quad (1.37)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \frac{d}{dt} U(t) \rho(0) U^\dagger(t) + U(t) \rho(0) \frac{d}{dt} U^\dagger(t) = -i [H, \rho(0)]_t, \quad (1.38)$$

quindi vale l'equazione del moto ²

$$\boxed{\frac{d}{dt} \rho(t) = -i [H, \rho]}.$$

In Particolare, se l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo, l'evoluzione è data da

$$\rho(t) = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt}. \quad (1.40)$$

Notare che la matrice densità evolve con il tempo invertito rispetto agli operatori in rappresentazione di Heisenberg: essa, a differenza degli altri operatori, dipende dal tempo nella rappresentazione di Schroedinger mentre è indipendente dal tempo in rappresentazione di Heisenberg. Ad esempio, le medie di un operatore nelle due rappresentazioni sono date da

$$\langle A \rangle = \text{tr} \{ \rho_S(t) A_S \} = \text{tr} \{ \rho_H A_H(t) \} \quad (1.41)$$

con

$$\rho_S(t) = U(t) \rho U^\dagger(t), \quad (1.42)$$

$$A_H(t) = U^\dagger(t) A U(t). \quad (1.43)$$

Abbiamo visto che, in meccanica quantistica, si può definire anche un tipo di evoluzione che si contrappone a quella deterministica data dall'equazione di Schroedinger e che si riferisce al processo di misura. In questo caso il pacchetto d'onda si riduce ed evolve in un autostato dell'osservabile, con una certa probabilità. Questo, in termini di matrice densità, significa che lo stato passa da uno stato puro

²Questa equazione rappresenta l'analogo quantistico del teorema di Liouville in meccanica classica

$$\frac{d}{dt} \rho_{cl}(t) = - \{H, \rho_{cl}\}_{cl} \quad (1.39)$$

dove con $\{\dots\}_{cl}$ vengono indicate le parentesi di Poisson.

ad una mistura statistica. Per cui, data un'osservabile A con autostati $\{|\psi_k\rangle\}$, la matrice densità di uno stato puro, prima della misura, è data da

$$\rho_{pre} = \langle\psi|\psi\rangle, \quad (1.44)$$

con

$$|\psi\rangle = \sum_k b_k |\psi_k\rangle. \quad (1.45)$$

Dopo la misura evolve in

$$\rho_{post} = \sum_k |b_k|^2 |\psi_k\rangle \langle\psi_k|. \quad (1.46)$$

Esercizio 3. *Un fascio di particelle, tutte con spin $|\uparrow\rangle$, caratterizzato da una matrice densità ρ_0 , viene inviato in uno Stern-Gerlach orientato lungo x . Dopo l'interazione la matrice densità cambia in ρ_1 . A questo punto uno dei due fasci in cui le particelle iniziali si sono divise (per esempio il fascio con spin $|+\rangle$) viene inviato in un altro Stern-Gerlach, questa volta orientato lungo z , a seguito del quale la matrice densità diventa ρ_2 . Determinare ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 .*

1.4.2 Non univocità della matrice densità

Va notato che la stessa matrice densità può riferirsi a diversi ensemble di stati

Esempio 1.4.1. Consideriamo un sistema a due livelli e la base ortonormale $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. Prendiamo in considerazione i due ensemble di stati $|\uparrow\rangle, p_\uparrow = 3/4; |\downarrow\rangle, p_\downarrow = 1/4$ e $|\alpha_+\rangle, p_+ = 1/2; |\alpha_-\rangle, p_- = 1/2$ avendo definito

$$|\alpha_\pm\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} |\uparrow\rangle \pm \sqrt{\frac{1}{4}} |\downarrow\rangle. \quad (1.47)$$

Notiamo che i due stati così definiti non sono ortogonali. Possiamo costruire le matrici densità corrispondenti ai due ensemble:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{3}{4} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + \frac{1}{4} |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} |\alpha_+\rangle \langle\alpha_+| + \frac{1}{2} |\alpha_-\rangle \langle\alpha_-|. \end{aligned}$$

Con semplici passaggi è facile rendersi conto che $\rho_1 = \rho_2$, ossia a due ensemble diversi corrisponde la stessa matrice densità.

Quali classi di ensembles danno luogo alla stessa matrice densità? Consideriamo un ensemble di N stati $\{p_j, |\psi_j\rangle\}$ (ricordare che N può essere grande a piacere e non è vincolato dalla dimensione dello spazio di Hilbert), corrispondente alla matrice densità

$$\rho = \sum_{j=1}^N p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| \quad (1.48)$$

quali sono gli altri ensemble che corrispondono alla stessa ρ ? Utilizziamo il seguente truccetto per conteggiare gli stati dell'ensemble:

1. passiamo dagli stati normalizzati $|\psi_j\rangle$ agli stati $|\tilde{\psi}_j\rangle$ (non più normalizzati ad 1)

$$|\psi_j\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}_j\rangle = \sqrt{p_j} |\psi_j\rangle \quad (1.49)$$

2. assegnamo all'indice j valori fino all'infinito e definiamo gli stati come:

$$|\tilde{\psi}_j\rangle = \begin{cases} \sqrt{p_j} |\psi_j\rangle & j \leq N \\ 0 & j > N \end{cases} \quad (1.50)$$

In questo modo posso caratterizzare qualsiasi ensemble $\{q_j, |\phi_j\rangle\}$ di un numero qualsiasi M di elementi passando dai suoi elementi naturali $|\phi_j\rangle$ agli elementi

$$|\tilde{\phi}_j\rangle = \begin{cases} \sqrt{q_j} |\phi_j\rangle & j \leq M \\ 0 & j > M \end{cases} \quad (1.51)$$

Lemma 1.4.2. *I set $\{|\tilde{\psi}_j\rangle\}$ e $\{|\tilde{\phi}_j\rangle\}$ generano la stessa matrice densità se e solo se*

$$|\tilde{\phi}_j\rangle = \sum_i u_{i,j} |\tilde{\psi}_i\rangle \quad (1.52)$$

con $u_{i,j}$ una matrice unitaria.

Dimostrazione. 1. (Se ...)

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i |\tilde{\psi}_i\rangle \langle \tilde{\psi}_i| = \sum_{k,i,j} u_{i,j} |\tilde{\phi}_j\rangle \langle \tilde{\phi}_k| u_{i,k}^* = \\ &= \sum_{k,j} |\tilde{\phi}_j\rangle \langle \tilde{\phi}_k| \underbrace{\sum_i u_{i,j} u_{i,k}^*}_{\delta_{k,j}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\phi}_k\rangle \langle \tilde{\phi}_k| \end{aligned} \quad (1.53)$$

2. (Solo se ...) Supponiamo che

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{\psi}_i\rangle \langle \tilde{\psi}_i| = \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\phi}_k\rangle \langle \tilde{\phi}_k|. \quad (1.54)$$

Effettuiamo la decomposizione spettrale, ossia scriviamo la ρ in forma diagonale

$$\rho = \sum_{k=1}^d \lambda_k |k\rangle \langle k| \quad (1.55)$$

dove d è la dimensione dello spazio di Hilbert e $|k\rangle$ sono gli autostati di ρ . Definiamo gli autostati non normalizzati

$$|\tilde{k}\rangle = \begin{cases} \sqrt{\lambda_k} |k\rangle & k \leq d \\ 0 & k > d \end{cases} \quad (1.56)$$

ed esprimiamo $|\tilde{\psi}_i\rangle$ in termini di tali vettori

$$|\tilde{\psi}_i\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} |\tilde{k}\rangle. \quad (1.57)$$

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}| = \sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{\psi}_i\rangle \langle \tilde{\psi}_i| = \sum_{i,j,k=1}^{\infty} c_{i,k} c_{i,j}^* |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{j}| \quad (1.58)$$

questo implica che deve valere

$$\sum_j c_{i,k} c_{i,j}^* = \delta_{j,k} \quad (1.59)$$

ossia $c_{i,k}$ deve essere unitaria. In forma compatta, si può scrivere

$$|\tilde{\psi}_k\rangle = C |\tilde{k}\rangle. \quad (1.60)$$

Un discorso analogo si può fare per un qualsiasi ensemble di stati $\{|\tilde{\phi}_k\rangle\}$ che corrispondono alla stessa matrice densità ρ :

$$|\tilde{\phi}_k\rangle = D |\tilde{k}\rangle. \quad (1.61)$$

quindi

$$|\tilde{\phi}_k\rangle = DC^{-1} |\tilde{\psi}_k\rangle \quad (1.62)$$

ma, poichè D e C sono unitarie, anche il prodotto DC^{-1} lo è, come si voleva dimostrare. $\square$

Definizione 1.4.3. Un **ensemble minimo** per ρ è un ensemble contenente un numero di elementi minore o pari al rango di ρ .

1.5 Entropia

Nel caso di un insieme discreto classico di configurazioni, si può definire l'Entropia a partire dai possibili risultati di una misura. Siano $\{p_i\}$ le probabilità relative a ciascun possibile risultato della misura. In termini "frequentistici" $p_i = n_i/n$ ossia il rapporto fra numero di uscite del risultato i -esimo e il numero totale di misurazioni.

Considerando n misure, il numero di modi per riarrangiare gli n risultati è

$$W = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots} \quad (1.63)$$

passando al logaritmo ed utilizzando l'approssimazione di Stirling per i fattoriali si ottiene

$$\ln W \simeq n \ln n - \sum_i n_i \ln n_i = -n \sum_i p_i \ln p_i. \quad (1.64)$$

L'entropia (di Shannon) è data da

$$S_{cl} = \frac{\ln W}{n} = - \sum_j p_j \ln p_j. \quad (1.65)$$

Nel caso quantistico, dato uno stato ρ posso cercare di ottenere informazioni sul sistema effettuando una misura ortogonale. Ad ogni misura corrisponde una distribuzione diversa di probabilità $\{p_k\}$ relative ai possibili risultati della misura. Ciascuna distribuzione definisce una diversa entropia di Shannon. Ciò significa che ogni misura fornisce una quantità diversa di informazione. Si dimostra che, fra queste misure, quella per cui è minima l'entropia di Shannon corrisponde ad una misura proiettiva sugli autostati di ρ . Possiamo quindi introdurre la cosiddetta *entropia di Von Neumann*

$$S = - \operatorname{tr} \{ \rho \ln \rho \}, \quad (1.66)$$

che corrisponde proprio al valore minimo dell'entropia di Shannon rispetto a tutte le possibili misure massimali.

1.5.1 Ensemble canonico

È istruttivo ricavare l'espressione della matrice densità nell'ensemble canonico, imponendo che sia massima l'entropia con in più il vincolo che sia costante l'energia media. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con i seguenti vincoli:

$$\text{tr} \{ \rho H \} = \langle E \rangle, \quad (1.67)$$

$$\text{tr} \{ \rho \} = 1. \quad (1.68)$$

Variando ρ si ha

$$\delta S = \text{tr} \{ (1 + \ln \rho) \delta \rho \} = 0, \quad (1.69)$$

$$\text{tr} \{ \delta \rho \} = 0, \quad (1.70)$$

$$\text{tr} \{ H \delta \rho \} = 0. \quad (1.71)$$

Introducendo due moltiplicatori di Lagrange λ e η si ottiene

$$\text{tr} \{ (1 + \ln \rho + \lambda + \eta H) \delta \rho \} = 0. \quad (1.72)$$

Poiché $\delta \rho$ è arbitrario e tutte le variazioni sono indipendenti, la (1.72) è soddisfatta se e solo se

$$1 + \ln \rho + \lambda + \eta H = 0 \quad (1.73)$$

ossia

$$\rho = e^{-(1+\lambda)} e^{-\eta H}. \quad (1.74)$$

Determiniamo ora i coefficienti

$$\text{tr} \{ \rho \} = 1 = e^{-(1+\lambda)} \text{tr} \{ e^{-\eta H} \}, \quad (1.75)$$

$$e^{(1+\lambda)} = \text{tr} \{ e^{-\eta H} \}, \quad (1.76)$$

quindi

$$\rho = \frac{e^{-\eta H}}{\text{tr} \{ e^{-\eta H} \}}. \quad (1.77)$$

Per determinare η consideriamo, per esempio, un modo di radiazione all'equilibrio termico a temperatura T

$$H = \hbar \omega a^\dagger a, \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\hbar \omega \sum_n \langle n | a^\dagger a e^{-\eta \hbar \omega a^\dagger a} | n \rangle}{\sum_n \langle n | e^{-\eta \hbar \omega a^\dagger a} | n \rangle} \\ &= \frac{\hbar \omega}{e^{\eta \hbar \omega} - 1}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Per il teorema di equipartizione, nel limite di $\hbar \rightarrow 0$, si deve avere $\langle E \rangle = kT$ (due gradi di libertà quadratici) quindi

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle E \rangle = \frac{1}{\eta} = kT, \quad (1.80)$$

ossia $\eta = \beta$. In definitiva, abbiamo ottenuto che

$$\boxed{\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}}$$

con $Z = \text{tr} \{ e^{-\beta H} \}$ funzione di partizione canonica. L'entropia corrispondente è

$$S = \beta \langle E \rangle + \ln Z, \quad (1.81)$$

con

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z. \quad (1.82)$$

1.6 Matrice densità ridotta

In questa sezione ci dedichiamo a studiare come caratterizzare un sistema *bipartito*, intendendo con questo termine un sistema composito formato da due sottosistemi, che indicheremo con A e B . Lo spazio di Hilbert complessivo è

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (1.83)$$

Indicando la matrice densità del sistema composito con ρ_{AB} , possiamo definire, a partire da essa, una nuova matrice densità relativa ad uno solo dei due sottosistemi e detta *matrice densità ridotta*. La matrice densità ridotta del sistema A è

$$\rho_A = \text{tr}_B \{ \rho_{AB} \}, \quad (1.84)$$

dove con $\rho_A = \text{tr}_B \{ \}$ si intende la traccia fatta sui gradi di libertà del sistema B ³. In maniera del tutto simmetrica, per il sistema B si ha

$$\rho_B = \text{tr}_A \{ \rho_{AB} \}. \quad (1.87)$$

La matrice densità ridotta ha tutte le caratteristiche di una matrice densità (nello spazio del sottosistema):

- è hermitiana

$$\rho_A^\dagger = \rho_A \quad (1.88)$$

Dimostrazione. Per un set completo $\{|m\rangle\} \in \mathcal{H}_B$,

$$\rho_A^\dagger = \sum_m \langle m | \rho_{AB}^\dagger | m \rangle = \sum_m \langle m | \rho_{AB} | m \rangle = \rho_A \quad (1.89)$$

dove si è sfruttata la proprietà (1.21) di hermiticità di ρ_{AB} . □

- Ha traccia unitaria

$$\text{tr}_A \{ \rho_A \} = 1 \quad (1.90)$$

Dimostrazione. Eseguiamo la traccia in una base ortonormale di A $\{|\psi_n\rangle\} \in \mathcal{H}_A$:

$$\text{tr}_A \{ \rho_A \} = \sum_n \langle \psi_n | \rho_A | \psi_n \rangle = \sum_{n,m} \langle \psi_n | \langle m | \rho_{AB} | m \rangle | \psi_n \rangle = \text{tr} \{ \rho_{AB} \} = 1 \quad (1.91)$$

avendo sfruttato il fatto che il prodotto delle due basi in A e B forma una base completa in AB e la proprietà (1.22). □

- è non negativa in $\mathcal{H}_A$, ossia per ogni $|\chi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$

$$\langle \chi_A | \rho_A | \chi_A \rangle \geq 0 \quad (1.92)$$

³Consideriamo un set completo di stati ortonormali in $\mathcal{H}_B$

$$\{|m\rangle\} \in \mathcal{H}_B, \quad (1.85)$$

la traccia su B di un operatore M_{AB} definito su A e B è

$$\text{tr}_B \{ M_{AB} \} = \sum_m \langle m | M_{AB} | m \rangle \quad (1.86)$$

Dimostrazione.

$$\langle \chi_A | \rho_A | \chi_A \rangle = \langle \chi_A | \sum_m \langle m | \rho_{AB} | m \rangle | \chi_A \rangle \geq 0 \quad (1.93)$$

dove si è usata la proprietà (1.24) per ρ_{AB} . □

Perché si sceglie proprio la matrice densità ridotta per studiare un sottosistema? A prima vista sembrerebbe che, seppure ragionevole, tale scelta sia un po' arbitraria. In realtà definire la matrice densità ridotta non solo non è arbitrario, ma è anche l'unica scelta possibile consistente con la statistica che si ottiene effettuando misure sul solo sottosistema

Dimostrazione. Supponiamo che M sia un osservabile per il sistema A , vogliamo trovare un operatore σ_A in A che sia un operatore densità e che descriva la statistica del sottosistema A in modo coerente, ossia in modo da avere (per qualsiasi M)

$$\langle M \rangle = \text{tr} \{ \rho_{AB} M \} = \text{tr}_A \{ \sigma_A M \}, \quad (1.94)$$

vogliamo dimostrare che la scelta $\sigma_A = \rho_A$ è non solo una scelta compatibile con tale richiesta, ma anche l'unica.

1. Dimostriamo che ρ_A è compatibile

$$\text{tr}_A \{ \rho_A M \} = \sum_{n,m} \langle \psi_n^{(A)} | M | m_B \rangle \rho_{AB} \langle m_B | \psi_n^{(A)} \rangle = \text{tr} \{ M \rho_{AB} \} \quad (1.95)$$

2. Ora bisogna vedere che ρ_A è l'unica scelta possibile. Definiamo un mapping generico $f(\rho_{AB})$ che porti ρ_{AB} in σ_A tale che

$$f(\rho_{AB}) = \sigma_A, \quad (1.96)$$

e

$$\text{tr} \{ M \rho_{AB} \} = \text{tr}_A \{ M f(\rho_{AB}) \}, \quad (1.97)$$

per qualsiasi M definito in A . Consideriamo ora un set completo $\{M_i\}$ di operatori per lo spazio degli operatori hermitiani di A , ortonormale rispetto al prodotto di Hilbert-Schmidt

$$(X, Y) = \text{tr} \{ XY \}. \quad (1.98)$$

Quindi, un operatore in A può essere scomposto come

$$O_A = \sum_i M_i (M_i, O_A) = \sum_i M_i \text{tr}_A \{ M_i O_A \}. \quad (1.99)$$

In particolare, questo è vero per f

$$f(\rho_{AB}) = \sum_i M_i \text{tr}_A \{ M_i f(\rho_{AB}) \}, \quad (1.100)$$

tuttavia, per ipotesi, deve valere la (1.97), quindi

$$f(\rho_{AB}) = \sum_i M_i \text{tr} \{ M_i \rho_{AB} \} = \sum_i M_i \text{tr}_A \{ M_i \text{tr}_B \{ \rho_{AB} \} \}, \quad (1.101)$$

il che implica che

$$f(\rho_{AB}) = \text{tr}_B \{ \rho_{AB} \} = \rho_A. \quad (1.102)$$

□

Un altro aspetto molto importante della matrice densità ridotta è la sua evoluzione. Sappiamo che ρ_{AB} evolve in maniera unitaria secondo l'equazione di Schroedinger

$$\rho_{AB}(t) = U(t)\rho_{AB}U^\dagger(t). \quad (1.103)$$

L'evoluzione di ρ_A si ottiene tracciando su B :

$$\rho_A(t) = \text{tr}_B \{U(t)\rho_{AB}U^\dagger(t)\}, \quad (1.104)$$

questo significa che, tranne in alcuni casi, non è più possibile scrivere

$$\rho_A(t) = \tilde{U}(t)\rho_A\tilde{U}^\dagger(t) \quad (1.105)$$

ossia, l'evoluzione non è unitaria. Come conseguenza, uno stato puro può evolvere in uno stato mescolato e viceversa, cosa assolutamente impossibile in un'evoluzione unitaria. Come si vedrà, questo meccanismo è alla base del fenomeno chiamato *decoerenza*.

Esempio 1.6.1. Sistemi separabili. Consideriamo due sistemi *separabili*, ossia tali che lo stato complessivo sia il prodotto tensoriale di stati del singolo sottosistema

$$\rho_{AB} = \sigma_A \otimes \sigma_B, \quad (1.106)$$

in questo caso le matrici densità ridotte sono semplicemente

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sigma_A \\ \rho_B &= \sigma_B. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Inoltre, se i due sistemi non interagiscono

$$H = H_A + H_B, \quad (1.108)$$

l'evoluzione delle due matrici densità ridotte è unitaria e lo stato rimane separabile

$$\rho_A(t) = e^{-iH_A t} \rho_A(0) e^{iH_A t}, \quad (1.109)$$

$$\rho_B(t) = e^{-iH_B t} \rho_B(0) e^{iH_B t}, \quad (1.110)$$

$$\rho_{AB}(t) = \rho_A(t) \otimes \rho_B(t). \quad (1.111)$$

Esempio 1.6.2. Stato entangled. Consideriamo due sistemi a due livelli, descrivibili con il formalismo di spin 1/2. Supponiamo di avere uno stato iniziale puro

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle], \quad (1.112)$$

questo è un esempio di stato *entangled*, uno stato, cioè, che non può essere espresso come prodotto tensoriale di stati appartenenti ai differenti spazi di Hilbert. Questa caratteristica verrà analizzata con più attenzione nel capitolo ???. La matrice densità di AB è

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| \quad (1.113)$$

mentre le matrici densità ridotte sono

$$\begin{aligned} \rho_A &= \frac{1}{2} (|0_A\rangle \langle 0_A| + |1_A\rangle \langle 1_A|) \\ \rho_B &= \frac{1}{2} (|0_B\rangle \langle 0_B| + |1_B\rangle \langle 1_B|). \end{aligned} \quad (1.114)$$

Quindi, mentre lo stato complessivo è puro, gli stati relativi ai due sottosistemi sono mescolati (in questo caso massimamente). In altri termini, mentre sul sistema complessivo abbiamo il massimo della conoscenza possibile, restringendoci ad un solo sottosistema perdiamo informazione. Questo fatto appare evidente calcolando l'entropia di von Neumann che per il sistema composito è

$$S_{AB} = -\text{tr} \{ \rho_{AB} \log_2 \rho_{AB} \} = 0, \quad (1.115)$$

mentre per i due sottosistemi

$$S_A = S_B = -\text{tr} \{ \rho_A \log_2 \rho_A \} = 1. \quad (1.116)$$

Esercizio 4. Consideriamo il sistema di due particelle di spin $1/2$ descritte dalla matrice densità

$$\rho_{AB} = \frac{\mathbf{1}}{8} + \frac{1}{2} |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-|, \quad (1.117)$$

dove $\mathbf{1}$ denota la matrice 4×4 identità e

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle). \quad (1.118)$$

1. Scrivere le matrici densità ridotte dei due spin
2. Supponiamo di voler misurare il primo spin lungo un asse $\mathbf{n}$ e il secondo lungo l'asse $\mathbf{m}$ tale che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \cos \theta$. Qual è la probabilità che entrambi gli spin abbiano direzione $\uparrow$ contemporaneamente lungo la rispettiva direzione di misura?
3. Qual è la matrice densità dopo la misura?

Esercizio 5. Supponiamo di voler effettuare un teletrasporto di uno stato

$$|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (1.119)$$

utilizzando uno stato massimamente entangled, ad esempio lo stato di Bell

$$|\Psi_{A,B}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle |0_B\rangle + |1_A\rangle |1_B\rangle). \quad (1.120)$$

Quale sarà la matrice densità di Bob prima della comunicazione classica? (Per i dettagli del protocollo e per la soluzione fare riferimento alla sezione (??))

Decomposizione di Schmidt

Prendiamo in considerazione un sistema bipartito (AB) con dimensioni dei sottospazi $d_A \leq d_B$. Scegliamo due basi $\{|\alpha_n\rangle\}$ e $\{|\beta_k\rangle\}$ rispettivamente per A e B . Il generico stato di AB è

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{d_A} \sum_{k=1}^{d_B} c_{n,k} |\alpha_n\rangle |\beta_k\rangle = \sum_{n=1}^{d_A} |\tilde{\phi}_n\rangle |\alpha_n\rangle \quad (1.121)$$

con $|\tilde{\phi}_n\rangle$ stati di B definiti come

$$|\tilde{\phi}_n\rangle = \sum_k c_{n,k} |\beta_k\rangle, \quad (1.122)$$

e in generale non necessariamente ortonormali. Consideriamo la matrice densità ridotta relativa allo stato di dimensione inferiore

$$\rho_A = \text{tr}_B |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (1.123)$$

e supponiamo di aver scelto la base $\{|\alpha_n\rangle\}$ tale che diagonalizzi ρ_A

$$\rho_A = \sum_n p_n |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n| = \sum_{n,m} |\tilde{\phi}_m\rangle \langle \tilde{\phi}_n| |\alpha_n\rangle \langle \alpha_m|. \quad (1.124)$$

Questa ipotesi implica che $\langle \tilde{\phi}_m | \tilde{\phi}_n \rangle = p_n \delta_{n,m}$ ossia gli stati

$$|\phi_n\rangle = \frac{|\tilde{\phi}_n\rangle}{\sqrt{p_n}}, \quad (1.125)$$

sono ortonormali. Questo procedimento ci permette di arrivare ad una decomposizione dello stato in termini di prodotti di vettori ortonormali appartenenti ai due sottospazi distinti

$$|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n |\phi_n\rangle_B |\alpha_n\rangle_A \quad (1.126)$$

($\lambda_n = \sqrt{p_n}$), nella somma, così ottenuta, appare un solo indice. Alcune osservazioni:

- La decomposizione di Schmidt è unica (a parte fattori di fase globali) nel caso in cui le $\lambda_n \neq 0$ sono anche non degeneri. In caso contrario posso scegliere diverse decomposizioni.
- Mentre la decomposizione di Schmidt è sempre possibile in un sistema bipartito, in generale non lo è per sistemi multipartiti.
- Utilizzando (1.126), si ricavano immediatamente le matrici densità ridotte dei due sottosistemi

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_n \lambda_n^2 |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n|, \\ \rho_B &= \sum_n \lambda_n^2 |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \end{aligned} \quad (1.127)$$

ossia, ρ_A e ρ_B hanno gli stessi autovalori.

- Si può introdurre una grandezza detta *Schmidt number*, indicata con m e definita come il numero di λ_n non nulli. Questa grandezza è legata all'entanglement fra i due sistemi ed in particolare:
 1. Per stati separati $m = 1$
 2. Per stati entangled $m > 1$
 3. Per stati massimamente entangled $m = d_A$ con $\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{d_A}}$

Esempio 1.6.3. Consideriamo lo stato

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^2 \sum_{j=\uparrow,\downarrow} a_{n,j} |n\rangle |j\rangle, \quad (1.128)$$

con $a_{0,\uparrow} = a_{1,\uparrow} = -a_{2,\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $a_{0,\downarrow} = a_{1,\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ e $a_{2,\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La matrice densità del sistema A è

$$\rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.129)$$

quindi ρ_A è diagonale nella base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Ne deriva che

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} [|0\rangle + |1\rangle - |2\rangle], \\ |\tilde{\phi}_\downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}} [|0\rangle + |1\rangle + 2|2\rangle], \end{aligned} \quad (1.130)$$

quindi la decomposizione di Schmidt dello stato iniziale è

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\tilde{\phi}_\uparrow\rangle |\uparrow\rangle + |\tilde{\phi}_\downarrow\rangle |\downarrow\rangle]. \quad (1.131)$$

Esercizio 6. Per gli stati a due qubit:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0_A\rangle \left(\frac{1}{2} |0_B\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |1_B\rangle \right) + |1_A\rangle \left(\frac{1}{2} |1_B\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |0_B\rangle \right) \right], \\
 |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|0_A\rangle |0_B\rangle + |1_A\rangle |1_B\rangle], \\
 |\psi\rangle &= \frac{1}{2} [|0_A\rangle |0_B\rangle + |0_A\rangle |1_B\rangle + |1_A\rangle |0_B\rangle + |1_A\rangle |1_B\rangle], \\
 |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [|0_A\rangle |0_B\rangle + |0_A\rangle |1_B\rangle + |1_A\rangle |1_B\rangle].
 \end{aligned} \tag{1.132}$$

1. Calcolare ρ_A e ρ_B
2. Trovare la decomposizione di Schmidt

Esercizio 7. Dimostrare che, in un sistema bipartito, una trasformazione locale non varia l'entanglement. Utilizzare la nozione di entropia per quantificare l'entanglement e sfruttare la decomposizione di Schmidt dello stato.

1.7 Purificazioni

Consideriamo un sistema A in uno stato mescolato nella decomposizione ortonormale

$$\rho_A = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|, \tag{1.133}$$

possiamo introdurre un secondo sistema R (eventualmente fittizio), con stessa dimensione di A in modo tale che lo stato complessivo dei due abbia come decomposizione di Schmidt

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_n \sqrt{p_n} |n\rangle_A |n\rangle_R, \tag{1.134}$$

a tale stato puro corrisponde una matrice densità ridotta di A pari proprio a (1.133), questo stato è detto *purificazione* di ρ_A . Va notato che, data una matrice densità, la sua purificazione non è unica.

1.8 Fidelity

Dati due stati, ci si può chiedere quanto essi siano simili fra di loro. In altri termini, dato lo spazio $\sigma(\mathcal{H})$ delle matrici densità su $\mathcal{H}$, ci chiediamo se si può introdurre una metrica. La risposta è affermativa, e una possibile definizione di distanza è data dalla *trace distance* definita come

$$D(\rho_1, \rho_2) = \|\rho_1 - \rho_2\|_{tr}, \tag{1.135}$$

dove la norma di un operatore è definita come

$$\|A\| = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sqrt{A^\dagger A} \right\}. \tag{1.136}$$

Chiaramente $D = 0$ se gli stati sono uguali.

Un altro fattore di merito per quantificare la vicinanza di due stati quantistici è la *Fidelity* definita come

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{tr} \left\{ \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right\}, \tag{1.137}$$

$$0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1. \quad (1.138)$$

La fidelity non è una metrica nello spazio $\sigma(\mathcal{H})$ (per esempio è massima quando gli stati sono uguali ed è nulla quando gli stati sono massimamente distanti) però da essa può essere definita la metrica

$$A(\rho_1, \rho_2) = \arccos F(\rho_1, \rho_2), \quad (1.139)$$

anche se in pratica risulta molto più spesso utile utilizzare direttamente F .

- Sotto l'azione di trasformazioni unitarie, sia D che F rimangono invariate

$$D(U\rho_1 U^\dagger, U\rho_2 U^\dagger) = D(\rho_1, \rho_2), \quad (1.140)$$

$$F(U\rho_1 U^\dagger, U\rho_2 U^\dagger) = F(\rho_1, \rho_2) \quad (1.141)$$

- Sotto l'azione di una quantum operation $\epsilon(\rho)$ (vedi Sec. ??) la distanza fra stati non può aumentare

$$D(\epsilon(\rho_1), \epsilon(\rho_2)) \leq D(\rho_1, \rho_2), \quad (1.142)$$

$$F(\epsilon(\rho_1), \epsilon(\rho_2)) \geq F(\rho_1, \rho_2). \quad (1.143)$$

- Se uno dei due stati è puro $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$

$$F(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{\langle\psi_1|\rho_2|\psi_1\rangle}. \quad (1.144)$$

Quindi, se anche l'altro è puro $\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$

$$F(\rho_1, \rho_2) = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|. \quad (1.145)$$

- Vale il *Teorema di Uhlmann*: siano $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ rispettivamente le purificazioni di ρ_1 e ρ_2 , allora

$$F(\rho_1, \rho_2) = \max_{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle} |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|. \quad (1.146)$$

- La relazione fra D e F è

$$\sqrt{1 - F(\rho_1, \rho_2)} \leq D(\rho_1, \rho_2) \leq 1 - \sqrt{F(\rho_1, \rho_2)}. \quad (1.147)$$