Modello di Ising e transizione para/ferro in teoria di campo medio (resume) ①

Il modello di Ising è definito come

$$H = -\frac{J}{2}\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j - \sum_i h_i\sigma_i \qquad \sigma_i = \pm 1$$

somma 1^i vicini

campo esterno

la termodinamica si ottiene dal potenziale termodinamico

$F(h, T)$ per $h_i = h \; \forall i$

campo ext

temperatura

intensive

simile a $G(P, T)$

intensive

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_h = -S \quad \text{entropia}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_T = -M \quad \text{magnetizzazione totale}$$

la suscettività magnetica è definita come

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial h}\right)_T$$

suscettività magn. isoterma

$$\chi = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}\right)_T$$ (2)

la meccanica statistica all'equilibrio

$$Z = \operatorname*{tr}_{\{\sigma\}} e^{-\beta H}$$

$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ che è una f di h e T se $h_i = h \ \forall i$

la magnetizzazione totale è

$M = \sum_i \langle \sigma_i \rangle = \sum_i m_i \qquad m_i = \langle \sigma_i \rangle$ magnetizzazione locale

se h è indipendente da i il sistema è invariante-traslazione-reticolare

$\hat{\sigma}_{i+R} = T_R \hat{\sigma}_i T_R^\dagger \qquad T_R$ traslazione

$$T_R H T_R^\dagger = -\frac{J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} T_R \sigma_i \underset{T_R^\dagger T_R}{\wedge} \sigma_j T_R^\dagger - \sum_i \underset{\text{param}}{h_i} T_R \hat{\sigma}_i T_R^\dagger$$

$$= -\frac{J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_{i+R} \sigma_{j+R} - \sum_i h_i \sigma_{i+R}$$

se h indip da i

$$= -\frac{J}{2} \sum_{\langle i'j' \rangle} \sigma_{i'} \sigma_{j'} - h \sum_{i'} \sigma_{i'} = H \qquad [H, T_R] = 0$$

$$\langle \sigma_{i+R} \rangle = \langle T_R \sigma_i T_R^\dagger \rangle = \frac{1}{Z} \operatorname{tr} e^{-\beta H} T_R \sigma_i T_R^\dagger =$$

$$= \frac{1}{Z} \operatorname{tr} \underbrace{T_R^\dagger e^{-\beta H} T_R}_{[H, T_R] = 0} \sigma_i = \langle \sigma_i \rangle$$

h indip i

$\langle \sigma_i \rangle = m_i$ indip da i

$$\boxed{M = N m} \qquad \boxed{\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial h}\right)_T = N\left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_T}$$

sistema omogeneo (h indip i)

Teoria di Campo medio

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2}\sum_{\langle ij\rangle} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i$$

$$\Downarrow$$

$$H_{eff} = -\sum_i h_i^{loc}\sigma_i$$ Ham. effettivo lineare in σ

$$h_i^{loc} = J\sum_j^{(i)} \langle \sigma_j \rangle_{eff} + h_i$$ campo locale MEDIO

$$Z_{eff} = \underset{\{\sigma\}}{\mathrm{tr}}\, e^{-\beta H_{eff}} = \prod_i^N 2\,\mathrm{ch}\,\beta h_i^{loc}$$ fattorizzazione

$$\langle \sigma_i \rangle_{eff} = \frac{\underset{\{\sigma\}}{\mathrm{tr}}\left(\prod_{j\neq i} e^{\beta h_j^{loc}\sigma_j}\right) e^{\beta h_i^{loc}\sigma_i}\sigma_i}{\underset{\{\sigma\}}{\mathrm{tr}}\left(\prod_{j\neq i} e^{\beta h_j^{loc}\sigma_j}\right) e^{\beta h_i^{loc}\sigma_i}} = \mathrm{tgh}\,\beta h_i^{loc}$$

$$\boxed{m_i = \mathrm{tgh}\left[\beta\left(J\sum_j^{(i)} m_j + h_i\right)\right]}$$

equazione di Curie Weiss

Caso omogeneo $h_i = h$ indip i

$$m = \tanh[\beta(Jzm + h)]$$

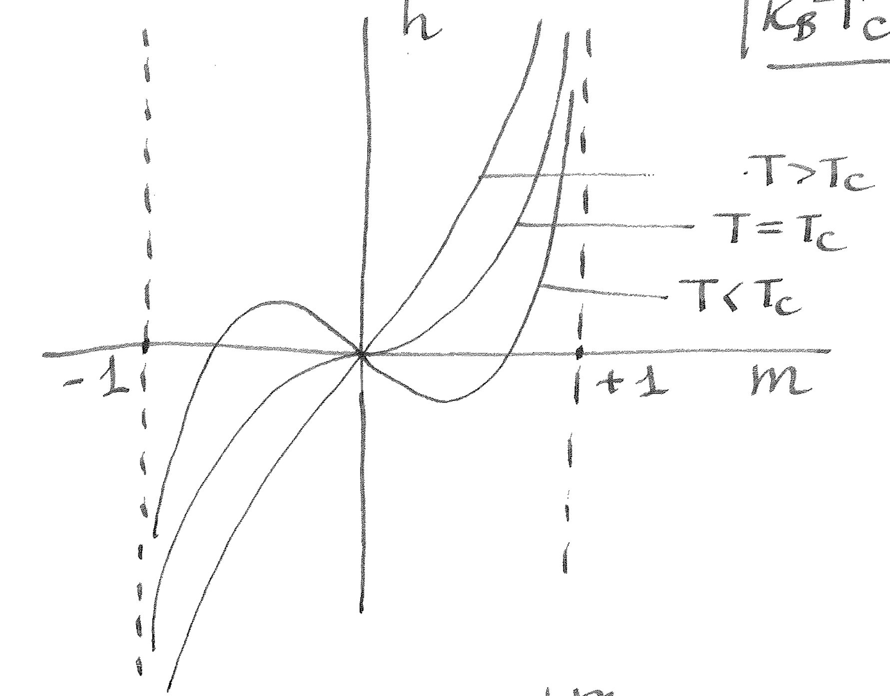
z = # primi vicini

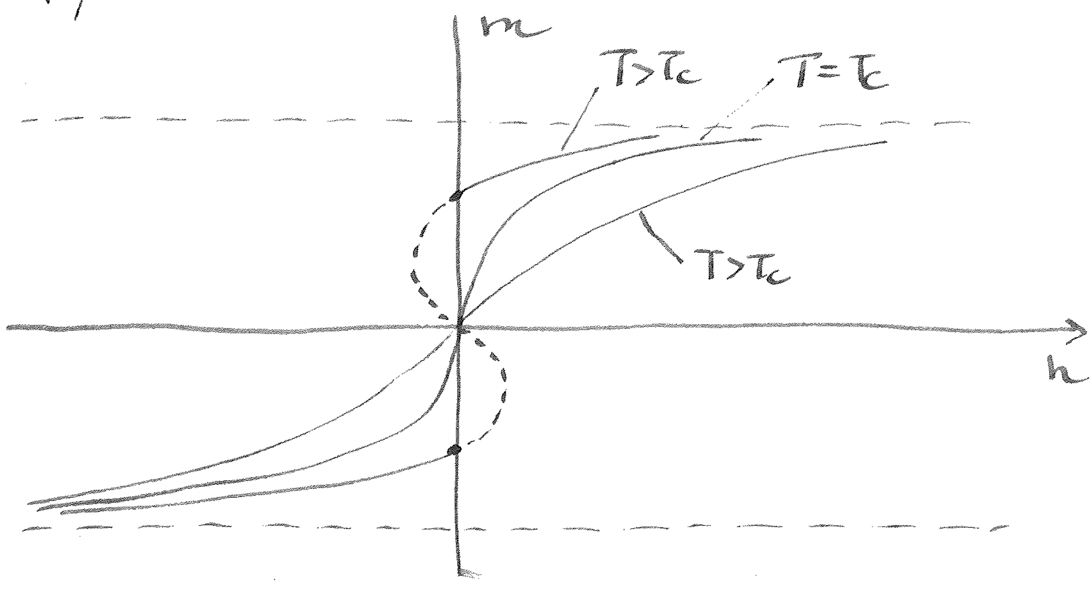
si può invertire

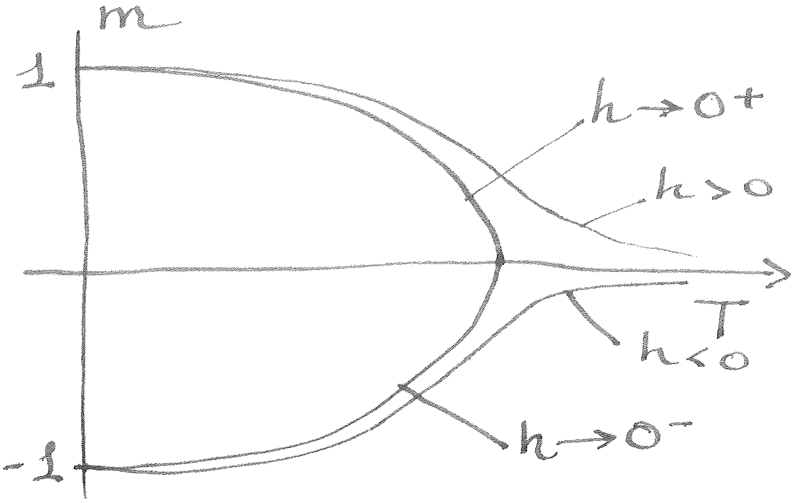
$$h = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{tgh}^{-1}(m) - Jzm$$

$$\mathrm{tgh}^{-1}(m) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right)$$

$$\boxed{k_B T_c = zJ}$$







sviluppo per m piccolo

$$\tanh^{-1}(m) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+m) - \ln(1-m)\right] \simeq \frac{1}{2}\left[m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \left(-m - \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3}\right)\right]$$

$$\simeq m + \frac{m^3}{3}$$

$$\boxed{h \simeq \frac{1}{\beta}\left(m + \frac{m^3}{3}\right) - Jzm}$$

equazione di C.W. per piccole m

per $h = 0$

$$\left(m + \frac{m^3}{3}\right) - \beta J z m = 0 \qquad m\left[(1 - \beta J z) + \frac{1}{3} m^2\right] = 0$$

$m = 0$ soluzione paramagnetica

$$m^2 = 3(\beta J z - 1) \qquad \beta J z > 1 \quad T < T_c$$

$$\beta_c J z = 1 \quad J z = 1/\beta_c$$

$$m^2 = 3\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)$$

$$m \sim (T_c - T)^{\beta} \qquad \boxed{\beta_{cl} = 1/2}$$

per $h \neq 0$ e $T > T_c$ deriviamo l'eq. di C.W.

$$1 \simeq \left(\frac{1}{\beta} - J z\right)\frac{\partial m}{\partial h}. \qquad \chi \cong N \frac{\beta}{1 - \beta J z} \sim \frac{1}{(T - T_c)^{\gamma}}$$

esponenti critici

$$\boxed{\gamma_{cl} = 1}$$