

SVILUPPO A PICCOLI k DEL POTENZIALE DI LANDAU (MODELLO DI ISING) FLUTTUAZIONI NON OMogenee

(1)

nel caso omogeneo e cioè per h indipendente
dal sito reticolare nel modello di Ising
abbiamo

$$\Psi(m) = [am^2 + bm^4 - hm]N \quad \text{se } m \text{ è per sito } \Psi \text{ è per sito!}$$

↑
per sito

con $a = \frac{1}{2}T_c^{(0)}(1 - \frac{T_c^{(0)}}{T_c}) \approx \frac{1}{2}(T - T_c)$ $b = \frac{T_c}{12}$

ricorda

$$\frac{\Psi}{N} = \frac{1}{2}J_2 m^2 - \frac{1}{\beta} \ln 2 \cosh[\beta(J_2 m + h)]$$

SOLO TERMINI LINEARI IN h
+ TERMINI 4-RTICI IN m

$$\ln \cosh x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$$

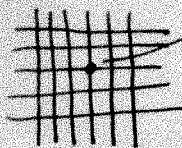
$$\frac{\Psi}{N} = \frac{1}{2}J_2 m^2 - \frac{1}{\beta} \left(\frac{[\beta(J_2 m + h)]^2}{2} - \frac{[\beta(J_2 m + h)]^4}{12} \right) = \frac{1}{2}(J_2 - \beta(J_2)^3)m^2 - \beta J_2 m h + \beta^3 \frac{(J_2 m)^4}{12} + \ln 2$$

$$\frac{\Psi}{N} = \frac{1}{2}T_c^{(0)}\left(1 - \frac{T_c^{(0)}}{T}\right)m^2 - m h + T_c^{(0)} \frac{m^4}{12}$$

Sviluppiamo il pot di Landau in un modello di
Ising sottoposto ad un campo che dipende dal sito

$$\Psi(m_i) = \frac{1}{2} \sum_j J_{ij} m_i m_j - \frac{1}{\beta} \sum_i \ln 2 \cosh[\beta \sum_j^{(i)} J_{ij} m_j + h_i]$$

questo è totale! non è per sito



~ sito i -simo $\leftrightarrow R_i$ vettore del reticolo

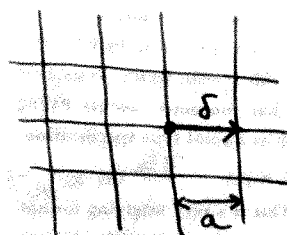
diretta $\propto R$ ed R' sono vettori del reticolo

(2)

$$\chi[m] = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{R, R'} J(R-R') m(R) m(R')}_{(a)} - \underbrace{\frac{1}{\beta} \sum_R \ln 2 \cosh \left[\beta \left(\sum_{R'} J(R-R') m(R') + h(R) \right) \right]}_{(b)}$$

dove nel modello di Ising

$$J(R) = \begin{cases} J_{\text{const}} \propto \vec{R} = \vec{\delta} & \text{vettore che collega i primi vicini} \\ 0 & \end{cases}$$



in 2 dimensioni

$$\vec{\delta} = \begin{cases} (0, a) \\ (a, 0) \\ (-a, 0) \\ (0, -a) \end{cases} \text{ sono tutti primi vicini}$$

a è il passo reticolare

definiamo la trasformata di Fourier sul reticolo

(vedi inserto) CONDIZIONI PERIODICHE AL CONFINO

$$f(R) = \sum_k \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{N} f(k) \quad \vec{k} = \vec{m} \frac{2\pi}{L} \quad \vec{m} \text{ vettore indiciale}$$

$$f(k) = \sum_R e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} f(R) \quad L = Na \quad \text{Id } 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

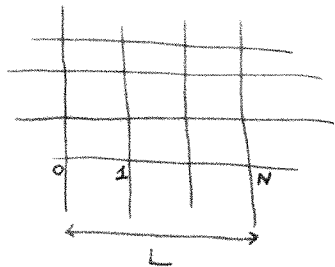
per $L \rightarrow \infty$

$$f(R) = \frac{a^d}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} f(k) \quad a^d \text{ volume alla reticolare}$$

$$f(k) = \frac{1}{a^d} \int d^d R e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} f(R)$$

TRASFO DI FOURIER SU RETICOLO

(2a)



$$\sigma(L+1) = \sigma(1)$$

$$\sigma(Na) = \sigma(0)$$

$$\sigma(pa) = \sum_k e^{ikpa} \sigma(k) / N^p \leftarrow \text{est ds norm}$$

$$\sigma((N+1)a) = \sum_k \frac{e^{ik(N+1)a}}{N^p} \sigma(k) = \sum_k \frac{\sigma(k)}{N^p}$$

$$e^{ikNa} = 1$$

$$kNa = m2\pi$$

$$k_m = m \frac{2\pi}{L} \quad m = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

$$k = \frac{m}{Na} 2\pi = \frac{m2\pi}{L}$$

$$\sigma(pa) = \sum_k \frac{e^{ikpa}}{N^p} \sigma(k)$$

$$\sigma(k) = \sum_R e^{-ikR} \sigma(R) = \sum_R \sum_{k'} e^{-i(k-k')R} \frac{\sigma(k')}{N}$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} e^{-i(k-k')pa} = \sum_{p=0}^{N-1} e^{-i \frac{pa}{Na} (m-m')} \quad \text{se } m=m' \text{ viene } N$$

quindi $N = N$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma(R) &= \sum_k \frac{e^{ikR}}{N} \sigma(k) \\ \sigma(k) &= \sum_R e^{-ikR} \sigma(R) \end{aligned}}$$

$$\text{se } k = m \frac{2\pi}{L} \quad m = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

$$R_n = na \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

a più dimensioni

$$\sigma(\vec{R}) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{N} \sigma(\vec{k}) \rightarrow \left(\frac{1}{N} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^d \right) \int d^d k e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \sigma(\vec{k})$$

$$\sigma(\vec{k}) = \sum_{\vec{R}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \sigma(\vec{R}) \rightarrow \frac{1}{a^d} \int d^d \vec{R} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \sigma(\vec{R})$$

• Trasfo Fourier + sviluppo potenze $\vec{k}$

(3)

a) $\frac{1}{2} \sum_{R, R'} m(R) J(R-R') m(R')$

$$\sum_{R'} J(R-R') m(R') = \frac{1}{N^2} \sum_{K_1, K_2} e^{iK_1(R-R')} e^{iK_2(R')} J(K_1) m(K_2)$$

$$\sum_R e^{iKR} = N \delta_{K,0} \quad \text{delta di Kronecker}$$

per $K=0 \quad \sum_R 1 = N$

$$\underbrace{\sum_{R'} J(R-R') m(R')}_{\text{convol}} = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_K e^{iKR} J(K) m(K)}_{\text{prod}}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{R, R'} m(R) J(R-R') m(R') = \frac{1}{2N} \sum_K J(K) m(K) m(-K)$$

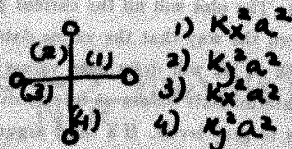
$$J(K) = \sum_R e^{-iKR} J(R) = \sum_{\vec{\delta}} e^{-i\vec{K} \cdot \vec{\delta}} (J)$$

per piccoli $\vec{k}$

$$J(K) = J\left(\sum_{\vec{\delta}} \left[1 - i\vec{k} \cdot \vec{\delta} - \frac{1}{2}(\vec{k} \cdot \vec{\delta})^2\right]\right) = J\left[z - \frac{1}{2} \sum_{\vec{\delta}} (\vec{k} \cdot \vec{\delta})^2\right]$$

↑
e' zero perché per ogni $\vec{\delta} \exists -\vec{\delta} \Rightarrow$ inv simm punto reticolo

$$\sum_{\vec{\delta}} (\vec{k} \cdot \vec{\delta})^2 = 2 k^2 a^2$$



* 3-d

$$\boxed{J(K) = J[z - k^2 a^2]} \leftarrow \text{è come una derivata al } \square$$

a) $\frac{1}{2N} \sum_K J(z - k^2 a^2) m(K) m(K)$

d)

4

$$\frac{1}{\beta} \sum_R \ln 2 \cosh \left[\beta \left(\sum_{R'} J(R-R') m(R') + h(R) \right) \right]$$

$$\ln \cosh x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$$

(b1) (b2)

b1) $\left[\beta \left(\sum_{R'} J(R-R') m(R') + h(R) \right) \right]^2$

soluzione lineare in h per $h \rightarrow 0$ su isoterma critica per $h \rightarrow 0$ $m \rightarrow 0$ come $h^{2/3}$

$$\beta^2 \left(\sum_{R'} J(R-R') m(R') \right)^2 + 2\beta^2 h(R) \sum_{R'} J(R-R') m(R')$$

b2) $\beta^4 \left(\sum_{R'} J(R-R') m(R') \right)^4 + 4\beta^4 h(R) \left(\sum_{R'} J(R-R') m(R') \right)^3$

perché per $m \rightarrow 0$ a $T \rightarrow T_c$ è un termine di ordine superiore

Prendiamo i termini relativi al campo esterno al 1° ordine non nullo anche rispetto al vettore d'onda è zero

$$\sum_R h(R) \sum_{R'} J(R-R') m(R') = \frac{1}{N} \sum_K h(K) J(K) m(K)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_K h(K) [J_K - J_K^2 a^2] m(K)$$

che significa trascurare il termine $\nabla m \cdot \nabla h$
(vedi dopo)

b1(b)

b1) (5)

$$\underbrace{\left(\frac{\beta}{2} \sum_R \left(\sum_{R'} J(R-R') m(R') \right)^2 + \beta \sum_R h(R) \sum_{R'} J(R-R') m(R') \right)}_{b2} - \underbrace{\left(\frac{\beta^3}{2} \sum_R \left(\sum_{R'} J(R-R') m(R') \right)^4 \right)}_{b1}$$

b1(a)] $\sum_R \left(\frac{1}{N} \sum_k e^{ikR} J(k) m(k) \right)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1 k_2} \underbrace{\sum_R e^{i(k_1 + k_2)R}}_{N \delta_{k_1, -k_2}} J(k_1) J(k_2) m(k_1) m(k_2)$

$$= \frac{1}{N} \sum_k J(k) J(-k) m(k) m(-k)$$

prendo gli ordini zero ed uno in k^2

$$\approx \frac{1}{N} \sum_k J^2(z^2 - 2k^2 a^2 z^2) m(k) m(-k)$$

trascuro i
termini
($\nabla \nabla m$)($\nabla \nabla m$)

b1(b)] Vedi prima

b2] $\frac{1}{N^3} \sum_{k_1 k_2 k_3} J(k_1) J(k_2) J(k_3) J(k_1 - k_2 - k_3) m(k_1) m(k_2) m(k_3) m(k_1 - k_2 - k_3)$

come il primo ordine in k^2 coinvolge un
terme di ordine m^4 trascuro tutti i
termini di ordine k^2 in questo termine

trascuro i termini
($\nabla m \cdot \nabla m$) m^2

$$\frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} J(z + \kappa^2 a^2) m(\mathbf{k}) - \frac{\beta}{2N} \sum_{\mathbf{k}} J^2(z^2 - 2\kappa^2 a^2) m(\mathbf{k}) m(-\mathbf{k}) +$$

(6)

$$+ \frac{\beta^2}{12N^3} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} (Jz)^3 m(\mathbf{k}_1) m(\mathbf{k}_2) m(\mathbf{k}_3) m(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \quad \star \quad \frac{\beta}{N} \sum_{\mathbf{k}} h(\mathbf{k}) m(\mathbf{k})$$

□ Sono i termini omogenei già ottenuti

$$\begin{aligned} \star \quad \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} h(-\mathbf{k}) m(\mathbf{k}) Jz &= \frac{Jz}{N} \sum_{\mathbf{R}} \sum_{\mathbf{R}'} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}'} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} h(\mathbf{R}) m(\mathbf{R}') = \\ &= \frac{Jz}{N} \sum_{\mathbf{R}} h(\mathbf{R}) m(\mathbf{R}') \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} = \\ &= \frac{Jz}{N} \sum_{\mathbf{R}} h(\mathbf{R}) m(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \left(-\frac{Ja^2}{2} + \beta J^2 a^2\right) \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \kappa^2 m^*(\mathbf{k}) = -\frac{a^2 J}{2} (1 - 2\beta Jz) \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \kappa^2 m^*(\mathbf{k}) m(\mathbf{k})$$

$$\text{per } T \sim T_c \quad \simeq \quad \frac{a^2 J}{2} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \kappa^2 m^*(\mathbf{k}) m(-\mathbf{k})$$

$$\nabla_{\mathbf{R}} m(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{N} m(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} (-i\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{N} m(\mathbf{k})$$

$$\sum_{\mathbf{R}} |\nabla_{\mathbf{R}} m(\mathbf{R})|^2 = \sum_{\mathbf{R}} \left| \sum_{\mathbf{k}} (-i\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{N} m(\mathbf{k}) \right|^2 =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (-i\mathbf{k}) \cdot (-i\mathbf{k}') \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{R}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{R}} m(\mathbf{k}) m^*(\mathbf{k}') =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \kappa^2 m(\mathbf{k}) m^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \kappa^2 m(\mathbf{k}) m(-\mathbf{k})$$

dueque ritrasformando in Rho:

(7)

$$\Psi = \sum_{\mathbf{R}} \underbrace{a m^2(\mathbf{r}) + b m^4(\mathbf{r})}_{\substack{\text{coefficient} \\ \text{Landau homog}}} + \underbrace{\left(\frac{a^2 J}{2} \right)}_c \sum_{\mathbf{R}} |\nabla_{\mathbf{R}} m(\mathbf{r})|^2 - \sum_{\mathbf{R}} h(\mathbf{r}) m(\mathbf{r})$$

In fatti Landau considera "l'energia libera"
fenomenologica

$$\Psi[m] = \int d^d x \left[a m^2(x) + b m^4(x) + c |\nabla m(x)|^2 - h(x) m(x) \right]$$

funzionale di Landau

• non significa che
la fase deve farla essere
omogenea - AF $q=1$!

l'energia libera
aumenta se la fase non è
omogenea nel parametro
d'ordine!