

Andamenti vicino al punto critico

potenziale di London

OMG @ BNB 0

$$\Psi[m] = N \{ a m^2 + b m^4 - h m \} + \text{const}$$

$$a = \frac{k_B T_c}{2} \left(1 - \frac{T_c}{T} \right) \sim T - T_c \quad T_c = \frac{J_z}{k_B}$$

$$b = \frac{k_B T_c}{12} \left(\frac{J_z}{T} \right)^3 > 0$$

intorno al punto critico una questione trans. di
fase con il parametro d'ordine m scalare
ha comportamento universale

l'espressione di Curie-Weiss nell'intorno
del pto critico si ottiene da Ψ derivando

$$\frac{\partial \Psi}{\partial m} = 0 \Rightarrow N \{ 2am + 4bm^3 - h \} = 0$$

$$m [2a + 4bm^2] = h \quad \text{è cubica}$$

— equazione di Curie Weiss

per $h = 0$ ho 3 soluzioni

$$m = 0$$

$$m^2 = -\frac{a}{2b} \quad \text{possibile solo se } a < 0 \Rightarrow T < T_c$$

lunghe del nuovo se $T > T_c$ $m = 0$ ($h = 0$)

$$\text{per } T < T_c \quad m = \pm \sqrt{-\frac{a}{2b}} \sim (T_c - T)^{1/2}$$

$$\boxed{m(h=0, T) \sim (T_c - T)^\beta \quad \beta = 1/2}$$

per $T = T_c$ ed $h \neq 0$ $a = 0$

$$4bm^3 = h$$

$$\boxed{m(h, T=T_c) \sim h^{1/3} \quad \delta = 3}$$

la risposta al campo magnetico omogeneo

$$\chi_0 = \frac{\partial m}{\partial h} = \chi(k=0)$$

derivando l'eq. di C.W.

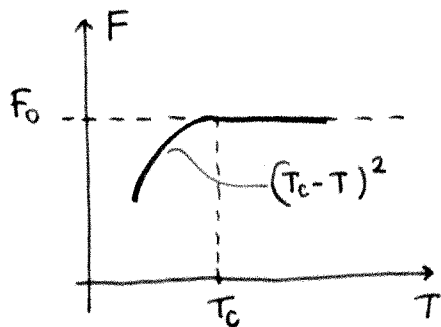
$$2a \frac{\partial m}{\partial h} + 12bm^2 \frac{\partial m}{\partial h} = 1$$

$$\frac{\partial m}{\partial h} = \frac{1}{2(a + 6bm^2)}$$

per $T > T_c$ $m = 0$ per $h = 0$

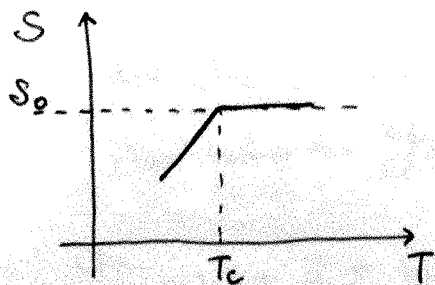
$$\boxed{\chi(h=0, T > T_c) = \frac{1}{2a} \sim \frac{1}{(T - T_c)^\gamma} \quad \gamma = 1}$$

intorno a T_c



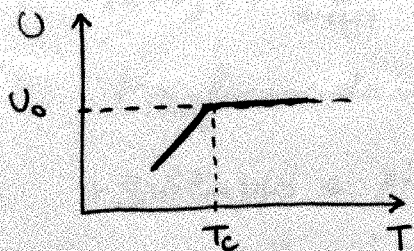
pot terremo un
continuo con ...

$$F = F_0 - \Delta F$$



... derivata prima
continua ...

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = S_0 + \frac{\partial}{\partial T} \Delta F$$



$$U = F + TS =$$

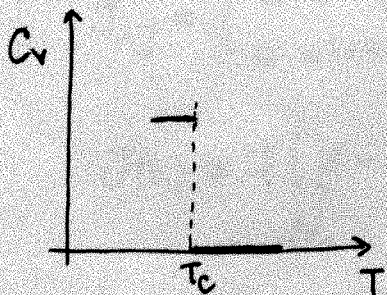
$$\approx F_0 - \Delta F + T_c S_0 + T_c \underbrace{\frac{\partial}{\partial T} \Delta F}_{\sim T_c - T}$$

$\sim (T_c - T)^2$

$$= U_0 + T_c \frac{\partial}{\partial T} \Delta F$$

... ma derivata seconda
discontinua

C_v ha un salto



$$C_v \approx \frac{1}{(T_c - T)^\alpha} \quad \alpha = 0$$

Se considero le fluttuazioni non omogenee
 a piccolo $\vec{k}$ del parametro d'ordine
 dovrei considerare un funzionale di un campo
 $m_i = \langle \sigma_i \rangle$ che ottengo andando a risolvere
 in teoria dei c.m. Il caso con h_x dipendente
 del sito - Si ottiene facilmente un RE
 modello di Ising

$$\Psi[\{m_i\}] = \frac{J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} m_i m_j - \frac{1}{\beta} \sum_i \ln 2 \cosh [\beta (\sum_j J_{ij}^{(i)} m_j + h_i)]$$

trasformato con Fourier su reticolo
 + Sviluppo a piccolo vettore d'onda k

$$J_{ij} = \begin{cases} J & \text{se } i, j \text{ vicini} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow J(\vec{k}) = 2 \sum_{\vec{a}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{a})$$

$a = \text{parametro reticolo}$

$$J(k) \approx J \left[\frac{2d}{a^2} - |\vec{k}|^2 \right]$$

$\frac{2d}{a^2}$ $\uparrow$ $\text{costante Laplaciana}$

$$\Psi(m) = \int \frac{d^d x}{\Lambda^d} \left[a m^2(x) + b m^4(x) + c |\vec{\nabla} m(x)|^2 - h(x) m(x) \right]$$

$\uparrow$ scala di lunghezza o a parametro reticolo

$$c = \frac{a^2 J}{2} \quad \text{nel modello di Ising}$$

for $T < T_c$ e $h=0$

$$\chi_0 = \frac{1}{2(a+6bm^2)}$$

$a \sim T - T_c$ for $T < T_c$

$m^2 \sim T_c - T$ for $T < T_c$

$$m^2 = -\frac{a}{2b}$$

$$\chi_0 = \frac{1}{2(a-3a)} = -\frac{1}{4a} \sim \frac{1}{(T_c - T)^\delta} \quad \delta=1$$

dunque $\chi = \frac{\partial m}{\partial h} = -\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}$ diverge

la densità media risulta del pot. terzo di ordine

il potenziale termodinamico è

$$F(h, T) = \Psi(\bar{m}, h, T)$$

soluzione dell'equazione di C.W.

$$F = N \left\{ a \left(-\frac{a}{2b} \right) + b \left(-\frac{a}{2b} \right)^2 \right\} \quad \text{for } h=0 \text{ + cost}$$

$\text{e } T < T_c$

$$F = F_0 + \left(-\frac{a^2}{2b} + \frac{a^2}{4b} \right) N + \text{const} =$$

$$F = F_0 - \left(\frac{a^2}{4b} \right) \Delta F \quad h=0 \quad T < T_c$$

$$F = F_0 \quad h=0 \quad T > T_c$$

F_0 dipende da T p.es in Ising è $F_0 = -\frac{N}{\beta} \ln 2$

Otteniamo la formula Ornstein-Zernike

$$\text{ov } \chi(\vec{u}) = \sum_{\vec{R}} e^{i\vec{u} \cdot \vec{R}} \chi(\vec{R})$$

$$\chi(\vec{R} = \vec{R}_i - \vec{R}_j) = \frac{\partial m_i}{\partial h_i}$$

$$\chi(\vec{u}) = \frac{\chi_0}{1 + (\xi u)^2}$$

$$\xi^2 = \frac{(1-m^2)\beta J a^2}{1 - (1-m^2)\beta J z} \quad \chi_0 = \beta \frac{1-m^2}{1 - (1-m^2)\beta J z}$$

$$\text{ov } T \gg T_c \quad m = 0$$

$$\boxed{\xi^2 = \frac{\beta J a^2}{1 - \beta J z} = \frac{a^2}{z} \frac{T_c}{T} \frac{1}{T - T_c} \approx \frac{1}{(T - T_c)^{\gamma}} \quad \gamma = 1}$$

↙ lunghezza di correlazione

Nella forma di Ornstein e Zernike

$$\chi(k, T=T_c, h=0) = \frac{\chi_0 \epsilon_c^{-2}}{\epsilon_c^{-2} + k^2}$$

per $T > T_c$

$$\chi_0 = \frac{\beta}{1 - \beta J z} \quad \epsilon_c^{-2} \chi_0 = \frac{1 - \cancel{\beta J z}}{\beta J a^2} \frac{\beta}{1 - \cancel{\beta J z}} = \frac{1}{J a^2} = \text{const}$$

$$\boxed{\text{quindi } \chi(k, T=T_c, h=0) = \frac{1/J a^2}{k^{2-\eta}} \quad \eta = 0}$$

funzione di correlazione

$$\frac{1}{k^{2-\eta}}$$