

Riassunto

- ↳ Formulazione Funzionale di MS
- ↳ Universalità per piccole ϵ facendo come "traccolatura" nell'integrale funzionale
- ↳ Fluttuazioni gaussiane divergono al pto critico e sp. nente diverso per C_V
$$\alpha = \frac{4-d}{2} \quad \alpha_{cl} = \alpha_{gauss} (d=4)$$
- ↳ fluttuazioni rilevanti se $d < 4$ (parametro d'ordine scalare)

- ↳ Parametro d'ordine a più di una componente

→ le componenti // ad h acquistano massa
per $T < T_c \Rightarrow$ segnale de
 $\langle m_{||}(r) m_{||}(0) \rangle \sim e^{-r/\xi_c} \quad \xi_c \text{ finito } T < T_c$

→ le componenti $\perp$ hanno sempre massa nulla
($\xi_c = \infty$) per $\forall T < T_c \Rightarrow$ bosoni di Goldstone

Teoria Gaussona

$\Rightarrow$ per $d \leq 2$ $\langle m_{||} \rangle = 0$
per $h \rightarrow 0$

Teoria Mermmon & Wagner

Scaling

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} \frac{J_{ij}}{2} \sigma_i \sigma_j$$



$$\tilde{H} = - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \tilde{J}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta}$$

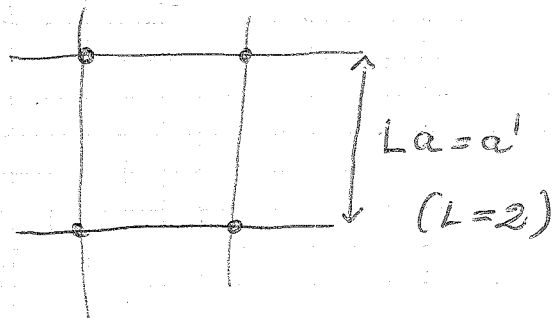
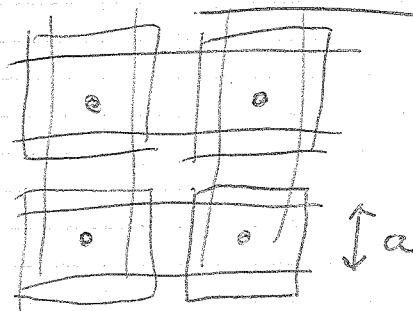
definisce i parametri
critici

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad \frac{h}{h_0} \quad (h_c = 0)$$

$$\tilde{J} = f(J)$$

?

attenzione!



adimensionali
($h_c = J$ p. es.)

esattamente a pto critico

$$\mathcal{Z}(t, h) = \bar{\mathcal{Z}}(\bar{E}, \bar{h})$$

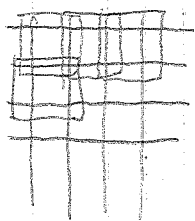
intensive

sono intensive
ma scalano

$$\text{tr}_{\sigma} \bar{e}^{\beta H}$$

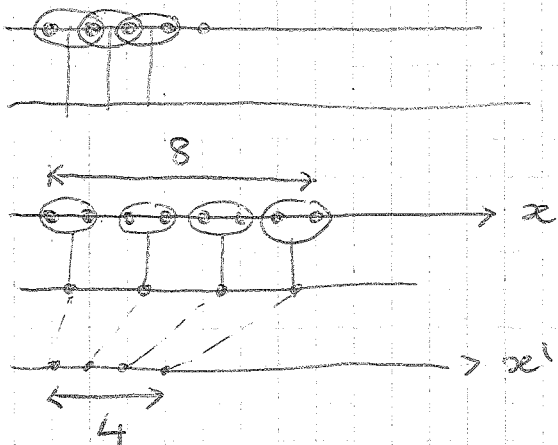
$$= \text{tr}_{\mu} \bar{e}^{\beta \bar{H}}$$

Trasf Scale



$$f(t, h) = \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z} = \frac{1}{L^d \bar{V}} \ln \bar{\mathcal{Z}}$$

$$f(t, h) = L^{-d} \bar{f}(\bar{t}, \bar{h})$$



$$\bar{V} = \frac{V}{L^d}$$

(L=2)

$$\bar{E} = f(L, t)$$

scordinanza
h

→ punto critico stesso valore dei parametri
pbo critico

$$t = 0$$

pbo critico

$$\bar{E} = 0$$

espando f per t piccolo

$$f(L, t) = \cancel{f(L, 0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione di } L}} t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) t^2$$

$$\bar{E} = f(L, t) = A(L) t$$

una grandezza f si avvicina
al punto critico

$$G \propto t^{x_G}$$

$$\bar{G} \propto \bar{E}^{x_G} = A^{x_G} t^{x_G}$$

$$\boxed{A(L) = L^{x_E}} \leftarrow \text{funzione omogenea!}$$

$$\bar{G} \propto \cancel{(L^{x_E})^{x_G}} \cancel{t^{x_G}} = \cancel{L^{x_E x_G}} \cancel{t^{x_G}}$$

$$\cancel{G} \propto \cancel{A}$$

andamento critica legge di potenza!

che quindi dimensiono di scale

$$\begin{aligned}\bar{t} &= L^{x_t} t \\ \bar{h} &= L^{x_h} h\end{aligned}$$

Scaling hypothesis

possiamo vedere da questa ipotesi garantisce le leggi di potenza delle osservabili rilevanti (quelle che vanno con legge di potenza ...)

Esempio ricordando che

$$m(t=0, h) \propto h^{1/\delta} \quad (\delta = 3 \text{ Landau})$$

e che

$$m(t, h=0) \propto t^\beta \quad (\beta = 1/2 \text{ Landau})$$

assumendo l'ipotesi di scaling

$$m(\bar{t}, \bar{h}) = L^{x_m} m(t, h)$$

$$m(t, h) = L^{-x_m} \bar{m}(L^{x_t} t, L^{x_h} h)$$

7A

$$1) \boxed{L^{x_n} h = 1} \quad L = h^{-\frac{1}{x_n}} = \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{x_n}}$$

$$m(t, h) = \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{x_m}{x_n}} \bar{m}(L^{x_t} t, 1)$$

$$m(t, h) = h^{\frac{x_m}{x_n}} \bar{m}\left(\frac{t}{h^{x_t/x_n}}, 1\right)$$

per cui ho

$$m(0, h) = h^{\frac{x_m}{x_n}} \underbrace{\bar{m}(0, 1)}_{\text{const}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\delta} = \frac{x_m}{x_n}}$$

$$2) \boxed{L^{x_t} t = 1} \quad L = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/x_t}$$

$$m(t, h) = t^{\frac{x_m}{x_t}} \bar{m}\left(1, \frac{h}{t^{x_n/x_t}}\right)$$

per cui ponendo $h=0$

$$m(t, 0) = t^{\frac{x_m}{x_t}} \bar{m}(1, 0)$$

$$\boxed{\beta = \frac{x_m}{x_t}}$$

Con l'ipotesi di scaling

Come vedremo può essendo $x_t > 0$ $x_h > 0$

ho mandato il parametro critico $\rightarrow 0$
in una scala speciale $\rightarrow \infty$

$$1) \quad L = (1/h)^{1/x_h} \quad h \rightarrow 0 \quad L \rightarrow \infty$$

$$2) \quad L = (1/t)^{1/x_t} \quad t \rightarrow 0 \quad L \rightarrow \infty$$

Funzione di correlazione

$$C(\vec{r}; t, h) = \langle m(\vec{r}) m(0) \rangle - \langle m \rangle^2$$

per motivi dimensionali

$$C(\vec{r}; t, h) = L^{2 \times m} C(r, t, h)$$

$$\vec{r} = \frac{r}{L} \leftarrow \vec{V} = \frac{V}{L^d}$$

$$C(r, t, h) = L^{-2 \times m} C\left(\frac{r}{L}; L^{x_t} t, L^{x_h} h\right)$$

1) scales t $L^{\chi_t} t = 1$ $t = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\chi_t}}$

$$C(r; t, h) = t^{2 \frac{\chi_m}{\chi_t}} C\left(t^{\frac{1}{\chi_t}} r, 1, \frac{h}{t^{\chi_h/\chi_t}}\right)$$

r scale naturalmente con ε e sgo

$$t^{1/\chi_t} r = r/\varepsilon$$

$$\varepsilon \sim t^{-1/\chi_t}$$

$$\gamma = 1/\chi_t > 0$$

2) determino la trasformata di Fourier
ricordando che

$$C(q, h \rightarrow 0, t \rightarrow 0) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$$

$$C(q) = \int d^d x \, e^{i q r} C(r) \quad \bar{r} = \frac{r}{L}$$

$$C(q) = L^d \underbrace{\int d^d \bar{r} \, e^{i \bar{q} \bar{r}} C(\bar{r})}_{C(\bar{q})} \quad \bar{q} = L q$$

$$C(q; t, h) = L^{-2x_m + d} C(\bar{q}; \bar{t}, \bar{h})$$

Scale q

$$C(q; t, h) = L^{-2x_m + d} C(Lq; L^{x_t} t, L^{x_h} h)$$

$$Lq = 1$$

$$L = 1/q$$

$$C(q; t, h) = q^{2x_m - d} C(1; \frac{t}{q^{x_t}}, \frac{h}{q^{x_h}})$$

pongo $t=0, h=0$

$$\frac{1}{q^{2-\eta}} = q^{2x_m - d} \quad 2-\eta = d-2x_m$$

$$\beta = \frac{x_m}{x_t} \quad \nu = \frac{1}{x_t}$$

$$2-\eta = x_t \left(\frac{d}{x_t} - 2 \frac{x_m}{x_t} \right) = \frac{1}{\nu} (d\nu - 2\beta)$$

$$\boxed{\eta = 2 - d + 2\beta/\nu} \quad (a)$$

Scalo t

$$L^{x_t} t = 1 \quad L = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/x_t}$$

$$C(q, t, h) = t^{2\frac{x_m}{x_t} - \frac{d}{x_t}} C\left(\frac{q}{t^{1/x_t}}; 1, \frac{h}{t^{x_h/x_t}}\right)$$

pongo adesso $q=0, h=0$ ottengo

$$X = C(q=0)$$

$$X = t^{2\beta - d\gamma} C(0; 1, 0)$$

ricordando che $X \sim t^{-\gamma}$

$$\boxed{\gamma = \gamma d - 2\beta} \quad (b)$$

Relazioni termodinamiche

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ F \end{array} \rightarrow U \rightarrow C_v (C_h)$$

$$f = \frac{1}{V} \ln Z \quad \text{energia libera
per unit vol
(Intensiva!)}$$

q Invariante di Scala
(Estensiva)

$$F = \frac{1}{V} \ln Z(t, h) = \bar{Z}(\bar{t}, \bar{h})$$

$$\frac{1}{V} \ln \bar{Z} = \frac{1}{V} \ln Z = f$$

$$f(t, h) = \frac{1}{L^d V} \ln \bar{Z} = L^{-d} f(\bar{t}, \bar{h})$$

$$f(t, h) = L^{-d} f(L^{x_t} t, L^{x_h} h)$$

Voglio il colore specifico ad h costante
ricordando che

$$C_h(t, h=0) \propto t^{-\alpha}$$

Scalo quando t

$$L^{x_t} t = 1 \quad L = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/x_t}$$

$$f(t, h) = t^{d/x_t} f\left(1, \frac{h}{t^{x_h/x_t}}\right)$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} (-\beta F) = F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} = F - T \frac{\partial F}{\partial T}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_n = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_n - \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_n - T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_n$$

$$C_n = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_n \approx -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_n$$

per le quantità specifiche

$$\frac{C_n}{V} = -T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)_n$$

ma

$$f = L^{2x_t - d} f(L^{x_t} t, L^{x_h} h)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = L^{2x_t - d} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{t}^2}$$

$$C_n(\bar{t}, \bar{h})$$

$$C_n = L^{2x_t - d} C_n(L^{x_t} t, L^{x_h} h)$$

scalo t $L^{x_t} t = 1$ $L = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/x_t}$

$$C_h = t^{\frac{d-2x_t}{x_t}} C_n\left(1, \frac{h}{t^{x_h/x_t}}\right)$$

pongo $h=0$ ed ottengo $\boxed{\alpha = 2 - d\nu} \textcircled{c}$

abbiamo visto che le quantità esterne
come F sono le stesse

$$\mathcal{Z}(t, h) = \bar{\mathcal{Z}}(\bar{t}, \bar{h})$$

$$F(t, h) = \bar{F}(\bar{t}, \bar{h})$$

quindi ha una parte di F che dipende
dal campo est esplicitamente

$$-\int d^d x \, m(x) h(x) = -\int d^d \bar{x} \, \bar{m}(\bar{x}) \bar{h}(\bar{x})$$

ma con cambio di scale

$$\begin{aligned} \int d^d x \, m(x) h(x) &= L^d \int d^d \bar{x} \, L^{-x_m} \bar{m} \, L^{-x_h} \bar{h} \\ &= L^{d-x_m-x_h} \int d^d \bar{x} \, \bar{m} \bar{h} \end{aligned}$$

$$d-x_m-x_h=0$$

divido per x_t ed ho

$$\left(\frac{d}{x_t} - \frac{x_m}{x_t} - \frac{x_h}{x_t} \right) = 0 \quad \frac{1}{\delta} = \frac{x_m}{x_h}$$

$$\boxed{d\psi - \beta - \beta\delta} \quad \textcircled{d}$$

Riassumendo le relazioni da scale
 per un parametro d'ordine scalare danno

$$\eta = 2 - d + 2\beta/\nu \quad (a)$$

$$\gamma = \nu d - 2\beta \quad (b)$$

$$\alpha = 2 - d\nu \quad (c)$$

$$d\nu - \beta - \beta\delta = 0 \quad (d)$$

possa ottenere anche il raccordo

$$\gamma' = \gamma$$

$$\alpha' = \alpha$$

$$\nu' = \nu$$

' = andamento per $T < T_c$

delle proprietà analitiche delle funzioni
 omogenee

Quindi ho

$$\eta \propto \beta \gamma \delta \nu \alpha' \gamma' \nu' \quad \text{7 indici critici}$$

7 relazioni

determinando 2 indici critici gli altri
 sono in relazione da scale

Teoria di Landau & Scaling

nella teoria di Landau

$$\epsilon_c^2 \sim 1/t \quad \nu = 1/2 \Rightarrow \boxed{X_t = 2}$$

quindi X_m deriva dalle dimensioni
di scala

$$\cancel{d X_m - X_t = 0}$$

$$\cancel{X_m =}$$

$$F_{\text{Landau}} = \int d^d x \left[\underbrace{am^2}_{(1)} + \underbrace{bm^4}_{(2)} - \underbrace{c|Dm|^2}_{(3)} - \underbrace{hm}_{(4)} \right]$$

o come

$$F_{\text{Landau}} = \bar{F}$$

allora

$$a \rightarrow L^{-X_a} \bar{a}$$

$$b \rightarrow L^{-X_b} \bar{b}$$

$$c \rightarrow L^{-X_c} \bar{c}$$

ma $X_a = X_t$ perche $a \propto t$

$$1) \quad d - 2x_m - x_t = 0$$

$$2) \quad d - 4x_m - x_b = 0$$

$$3) \quad d - \textcircled{2} - 2x_m - x_e = 0$$

$$4) \quad d - x_m - x_h = 0$$

gradiente
già sfruttato

se mettiamo $x_t = 2$ nella 1)
otteniamo

$$d - 2x_m - 2 = 0$$

$$x_m = \frac{d-2}{2}$$

dependendo
della dimensionalità!!

poi nella 4) otteniamo

$$d - \frac{d-2}{2} = x_h$$

$$x_h = \frac{d+2}{2}$$

?

per esempio

$$\beta = \frac{x_m}{x_t} = \frac{d-2}{2 \cdot 2} = \frac{d-2}{4}$$

ma sappiamo che $\beta = 1/2$

??

per $d=4$ ottengo gli indici di Landau

LANDAU Satisfies only for $d=4$!!