

→ FUNZIONALE DI LANDAU PER IL MODELLO DI ISING

(1)

abbiamo visto che

$$F(h, T) = \Psi(\bar{m}; h, T)$$

Così che

$$Z = e^{-\beta \Psi(\bar{m}; h, T)}$$

questo ha l'aria di una approssimazione di punto sella che risulta giustificata nel caso del modello di Ising a ∞ range -

In un modello di Ising a range finito?

Possiamo fare la trasfo Stratonovich-Hubbard sul termine $\square$

$$e^{\frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j} = e^{\frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j} = e^{-\beta H[\sigma_i]}$$

dove $J_{ij} = \begin{cases} J & \text{se } i, j \text{ primi vicini} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Supponiamo che esista un riferimento per cui le J_{ij} sono diag

$$R e^{-\beta H} R^T = e^{+\beta \sum_{\alpha} J_{\alpha} \sigma_{\alpha} \sigma_{\alpha}}$$

questo non m'aiuta per diagonalizzare il problema visto che la non linearità sta nel modo!

$$\sigma_i = \pm 1$$

$$\sigma_{\alpha} = R_{\alpha i} \sigma_i$$

J_{α} può essere
qualsiasi!

(2)

Comunque

$$e^{\frac{\beta \sum_{\alpha} J_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2}{2}} = \pi_{\alpha} e^{\frac{\beta J_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2}{2}}$$

$$e^{\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}} = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \pm \alpha \sigma}$$

$\frac{\beta J_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2}{2} \quad (\beta \sigma_{\alpha})^2 \quad \frac{J_{\alpha}}{2\beta} \quad \sigma^{-2}$

introduco dei campi ψ_{α} per cui $e^{\dots} = e^{\dots}$

$$\pi_{\alpha} e^{\frac{\beta J_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2}{2}} = \int \pi_{\alpha} \left[\frac{d\psi_{\alpha}}{\sqrt{2\pi J_{\alpha}}} \right] e^{-\frac{\sum \psi_{\alpha}^2 \beta}{2 J_{\alpha}} + \sum_{\alpha} \beta \sigma_{\alpha} \psi_{\alpha}}$$

ho linearizzato in σ a patto di introdurre un'integrazione dummy -

Ora riesprimo tutto nel riferimento originale

$$\psi_{\alpha} = \sum_i R_{\alpha i} \varphi_i$$

$$\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \frac{1}{J_{\alpha}} \psi_{\alpha} = \sum_j \varphi_i \left[\frac{1}{J} \right]_{ij} \varphi_j$$

$$\sigma_{\alpha} = \sum_i R_{\alpha i} \sigma_i$$

$$\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \sigma_{\alpha} = \sum_i \varphi_i \sigma_i$$

$$\pi_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{J_{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\det J_{ij}}}$$

$$R^T e^{\frac{\beta \sum_{\alpha} J_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2}{2}} R = e^{\frac{\beta \sum_j J_{ij} \sigma_i \sigma_j}{2}} =$$

$$= \int \left[\pi_i \frac{d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right] \frac{1}{\sqrt{\det J}} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_j \varphi_i [J^{-1}]_{ij} \varphi_j + \beta \sum_i \sigma_i \varphi_i}$$

adesso aggiungo le terme di campo esterno

$$e^{-\beta H} = e^{\frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j + \beta \sum_i h_i \sigma_i} = \int \left[\frac{\pi_i d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right] \frac{1}{|\det J|} \times$$

(3)

$$\times \exp \left[-\frac{\beta}{2} \sum_{ij} \varphi_i [J^{-1}]_{ij} \varphi_j + \beta \sum_i \sigma_i (\varphi_i + h_i) \right]$$

dove φ_i ha il significato di campo interno
dovuto agli altri spin in posizione i per la traccia su σ

$$\text{tr}_{\{\sigma\}} e^{-\beta H} = \int \left(\frac{\pi_i d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{[\det J]^{1/2}} \times -\beta \mathcal{L}_0$$

$$\times \exp \left[-\frac{\beta}{2} \sum_{ij} \varphi_i (J^{-1})_{ij} \varphi_j \right] \times 2 \cosh [\beta (\varphi_i + h_i)]$$

adesso introduco il funzionale del campo interno

$$\mathcal{L}[\varphi] = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{ij} \varphi_i (J^{-1})_{ij} \varphi_j}_{\mathcal{L}_0} - \underbrace{\frac{1}{\beta} \ln 2 \cosh [\beta (\varphi_i + h_i)]}_{\mathcal{L}_1}$$

per cui

$$\text{tr } e^{-\beta H} = \int \left(\frac{\pi_i d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{[\det J]^{1/2}} e^{-\beta \mathcal{L}[\varphi]}$$

se faccio l'integrale col metodo del punto di sella ottengo

$$\mathcal{Z} = \text{cost } e^{-\beta \mathcal{L}[\bar{\varphi}]}$$

il funzionale di Landau si ha considerando la trasformazione

$$\varphi_i = \sum_j J_{ij} m_j \quad \varphi = J m$$

per cui

(4)

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \varphi_i (J^{-1})_{ij} \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{jke} J_{ik} m_k (J^{-1})_{ij} J_{je} m_e = \\ = \frac{1}{2} \sum_{ijk} J_{ik} m_k m_i$$

$$\Psi[m] = \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} m_i m_j - \frac{1}{\beta} \ln 2 \cosh [\beta (\sum_j J_{ij} m_j + h_i)]$$

lo jacobiano della trasformazione è,

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial m_j} \right) dm_j = d\varphi_i$$

det J

$$Z = \int \left[\prod_i \frac{dm_i}{\sqrt{2\pi}} \right] (\det J)^{1/2} e^{-\beta \Psi(m)}$$

a meno di costanti

$F = \Psi(\bar{m})$ se adottato il metodo di steepest desc.

In generale però

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle m_i \rangle$$

le variabili continue m
si possono interpretare
come parametro d'ordine
microscopico

(5)

dimostrazione

partiamo da

$$Z = \int \left(\pi_i \frac{d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{\det J}} e^{-\beta(L_0 + L_I)} = \int \left(\pi_i \frac{d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{\det J}} e^{-\beta L_0} \text{tr}_{\{\sigma_j\}} e^{+\beta \sum_i (\varphi_i + h_i) \sigma_i}$$

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varphi_i (J^{-1})_{ij} \varphi_j \quad L_I = -\frac{1}{\beta} \sum_i \ln [\cosh(\varphi_i + h_i)]$$

adesso ho che

$$\langle \sigma_i \rangle = - \left(\frac{\partial F}{\partial h_i} \right)_T = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h_i}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial h_i} = \int \left(\pi_i \frac{d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{\det J}} e^{-\beta L_0} \text{tr}_{\{\sigma_j\}} \frac{\partial}{\partial h_i} e^{+\beta \sum_j (\varphi_j + h_j) \sigma_j}$$

noto che

$$\frac{\partial}{\partial h_i} e^{\beta \sum_j (\varphi_j + h_j) \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} e^{\beta (\sum_j (\varphi_j + h_j) \sigma_j)}$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial h_i} Z = \int \left(\pi_i \frac{d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{\det J}} e^{-\beta L_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} e^{-\beta L_I}$$

per parti

$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^N \frac{1}{\sqrt{\det J}} e^{-\beta(L_0 + L_I)} \right]_{\text{bordo}} - \int \left(\pi_i \frac{d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{\sqrt{\det J}} e^{-\beta L_I} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} e^{-\beta L_0}$$

Suppongo che $L[\varphi]$ sia sufficientemente
divergente per $\varphi \rightarrow \infty$ (sul bordo) per cui
il pezzo sul bordo va a zero.

Nel caso a range ∞ si può controllare con $\varphi(y)$

allora ho

(6)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} e^{-\beta \mathcal{L}_0} = -\beta \sum_J^{(i)} (J^{-1})_{ij} \varphi_j e^{-\beta \mathcal{L}_0}$$

equivalo ho

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{\beta \mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial h_i} = \frac{1}{\beta \mathcal{Z}} (-(-\beta)) \int \frac{\pi_i d\varphi_i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\det J}} e^{-\beta \mathcal{L}} \sum_J (J^{-1})_{ij} \varphi_j$$

$$= \langle \sum_J (J^{-1})_{ij} \varphi_j \rangle$$

ora posso passare alle variabili m_i per cui

$$m_i = \sum_J J_{ij} m_j$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle m_i \rangle \quad \text{CVD}$$