

TEORIE DI SKALING

Ci sono alcuni motivi che inducono a giustificare le assunzioni esistite di Kadanoff:

- ★ Lontano dal punto critico il comportamento del sistema è UNICAMENTE DET. DAI COSTI DI ACCOPPIAMENTO e dal TIPO DI INTERAZIONE cioè dal range delle forze di interazione dunque il comportamento è frutto di FENOMENI LOCALI LEGATI A PARAMETRI MICROSCOPICI QUASI-INDIVIDUALI relativi a gruppi di poche particelle in interazione.
- ★ Lontano dal punto critico la distanza di correlazione ξ dipende dalle forze per cui il sistema magnetico (ANNO D'ACCORDO) solo pochi spins in un volume ξ^d entrano in gioco GRANDI DI LIBERTÀ.
- ★ AL PUNTO CRITICO DOMINA UN COMPORTAMENTO COLLETTIVO DEL SIST. CHE è uguale le FUNZIONI MICROSCOPICHE DESCRIVENTI IL SISTEMA SONO DETERMINATE DA POCCHI PARAMETRI RILEVANTI che insorgono alla distanza del sist. al punto critico. SI PUÒ INTUIRE CHE AL PUNTO CRITICO CONTANO ALTRI PARAMETRI (come la DIMENSIONALITÀ legata al volume) piuttosto che i parametri MICROSCOPICI INDIVIDUALI.
- ★ AL PUNTO CRITICO OGNI GRADO DI LIBERTÀ SONO CONTENUTI IN ξ^d e intuitivamente il comportamento del sistema costituito da tutti i suoi REALI COSTITUENTI SI EQUIVALENTI A QUELLO DI UN ALTRO SISTEMA OTTENUTO DAL PRIMO RIDUCENDO I GRADI DI LIBERTÀ A TRE ALGEBRA UNA OPPORTUNA TRASFORMAZIONE DI SCALA (tanto sempre di cui stiamo trattando in volume di correlazione o tanto più grande).
- ★ Si può quindi intuire come OGNI ATTRAZIONALE DI INTERAZIONE facente parte di un certo INSIEME detto CLASSE DI UNIVERSALITÀ PRESENTI LO STESSO COMPORTAMENTO CRITICO INDIPENDENTE DEI DETTAGLI MICROSCOPICI.

La teoria di Kadanoff INTRODUCENDO UNA TRASFORMAZIONE DI SCALA SOSTITUISCE UNA FORMA ESPlicita

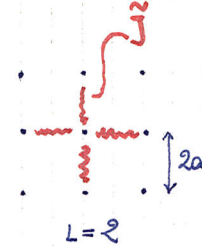
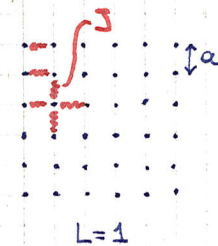
INTRODUCENDO UN FRACTO DI UNIVERSALITÀ

Definendo RELAZIONI FRA GLI INDICI CRITICI IN FUNZIONE DI SOLO 2 INDICI INDIPENDENTI.

PRINCIPIO DI UNIVERSALITÀ

AL PUNTO CRITICO il comportamento di un sistema e quello del suo SKALATO SONO IDENTICI all'osservazione delle leggi macroscopiche non devono comparire i parametri della trasformazione di scala.

La SKALATURA del sistema corrisponde all'ASSOCIAZIONE A UNA VARIABILE DI SITO CONTENUTE IN UNA CELLA DI LARGO L ($L =$ FATTORE DI SCALA) UNA VARIABILE DI CELLA



$$\{\sigma_i\} \longrightarrow \{\mu_\alpha\}$$

Questa trasformazione induce la:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \longrightarrow \tilde{H} = - \sum_{\alpha < \beta} \tilde{J}_{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta$$

DOVE $\tilde{J} = f(J)$ FUNZIONE GENERICAMENTE (con alcune condizioni che si vedranno seguito) DI J .

ANALOGIE E DIFFERENZE FRA COARSE GRAINING E SKALATURA

Bisogna notare come l'operazione di SKALATURA sta per entrambi anche per altri usi della COARSE GRAINING: mezzo locale delle variabili microscopiche che di interesse su volumetto $\sigma \ll V_{tot}$ ma $\sigma \gg a^d$ con a passo reticolare.

IL COARSE GRAINING è un modo di fare la MECCANICA STAT. CON I LOCALI per esempio per ricavare la forma di un volume ed in questo RIDUCE LA DENSITÀ DEI GRADI DI LIBERTÀ. L'ESAME per esempio al campo microscopico

$$\hat{\rho} = \sum_i \delta(r - r_i)$$

si associa la $\rho(r)$ IPROBABILITÀ che rappresenta la densità macroscopica per tutti gli r DISTANTI FRALORO MICROSCOPI DI a IN LUGO DELLA ESPRESSIONE MICROSCOPICA ESATTA. VALIDA PER V come si riduce la DENSITÀ DI GRADI DI LIBERTÀ ed in tal modo il c.q. è ANALOGO ALLA SKALATURA.

Però l'osservazione $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ NON È UNA SIMPLIX MAPPA ed è descritta dalla funzione $\beta = \beta(\xi)$ che può essere abbastanza generale -

KADANOFF NON TRAVA LA TRASFORMAZIONE MA SOLO ALCUNE PROPRIETÀ DIOTOGENEITÀ DEL POTERMO UGUA F. DI CORREZIONE E DEL CAMPO CHE DANDO RELAZIONI FRA INDICI CRITICI SI PUÒ COSÌ DELL'AGGIUNTO CON IL COMPORTAMENTO DEL SISTEMA $T \neq T_c$ -

LEGGI DI SKALA

Sia L il parametro di scala, consideriamo gradiente intensità il comportamento del sistema è descritto solo dai parametri irrilevanti:

$t; h; \chi_i$ = PARAM. IRRILEVANTI

Infatti sono le risposte in t : C_r ed in h : X oppure f_p che dipendono le risposte in χ_i formano un'unità e le fluttuazioni delle grandezze termodinamiche coniugate sono dovute al termine angolare al punto critico infatti grazie alla l.m. risp:

$$\delta \chi_i = \beta f_{\chi_i}(q) \delta \chi_i \quad \left| \frac{\delta \chi_i}{\delta \chi_i} \right| < \infty \Rightarrow \left| f_{\chi_i}(q) \right| < \infty$$

ovvero per $q=0$ $\left| \chi_i \right| < \infty$ -

Con questi parametri il sistema è descritto dall'ENERGIA LIBERA (NON DAL POT. DI LANDAU CHE È IL TRASFORMATO.)

$$F(t, h, \chi) = \frac{1}{V} \ln Z(t, h, \chi)$$

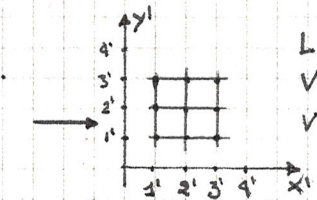
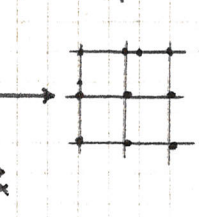
$$\varphi(t, h, \chi) = \frac{\partial F}{\partial h}$$

$$f_{\varphi}^{(2)} = \frac{\delta^2 [F \cdot V]}{\delta h(r) \delta h(r)} \quad (\text{F È LA FUNZIONE DI PARTIZIONE PER IL 2° ORDINE})$$

Questi parametri assieme al volume SUBISTONO LA TRASFORMAZIONE DI SKALA PERÒ

$$t \rightarrow \bar{t}; h \rightarrow \bar{h}; \chi_i \rightarrow \bar{\chi}_i; V \rightarrow \bar{V} = \frac{V}{L^d}$$

Considerazioni



$$L = 1.5 \\ V = 9q^2 \\ V' = \frac{V}{L^d} = 4q^2$$

La struttura associata ad ogni sito corrisponde alla 1 sito a distanza 1,5 a e' un dato che riportando tutto nel raggio scelto il valore di controllo è $1/L^d$ -

AL PUNTO CRITICO LA UNIVERSALITÀ DELLE LATERODINAMICHE È LA STESSA OVVERO UNA TRASFORMAZIONE DI SKALA AL PUNTO CRITICO LA SKALA INVARIA LA FORMA

$$Z(t, h, \chi) = \bar{Z}(\bar{t}, \bar{h}, \bar{\chi}) \quad \text{dove}$$

$$F(t, h, \chi) = \frac{1}{V} \ln Z = \frac{1}{L^d V} \ln \bar{Z} = L^d \bar{F}(\bar{t}, \bar{h}, \bar{\chi}) \quad \text{1° LEGGE DI SKALA}$$

Si può anche mettere il simbolo - su F visto che HA LA STESSA FORMA DI F L'infinito con -

SE

- 1) IL COMPORTAMENTO CRITICO È DET. DA LEGGI DI POTENZA
- 2) VALS LA UNIVERSALITÀ ED IN PARTICOLARE IL SISTEMA CHE RAGGIUNGE IL PUNTO CRITICO PER GLI STESSI VALORI DEI PARAMETRI

$$\bar{t} = \left[\frac{t}{\tau_0} \right] \quad \text{UNIVERSALITÀ DEL COMPORT. CRITICO} \\ \bar{h} = \left[\frac{h}{h_0} \right] \quad \text{DIMENSIONI DI SKALA DEL TEMPO E DEL CAMPO MAGNETICO}$$

Infatti per l'universalità quando $t=0$ anche $\bar{t}=0$ ma il sistema si deve stabilire per $t \rightarrow 0$ dove si pone

$$\bar{t} = f(L, t) = 0 + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot t + g(t^2) = A(L) t$$

Come si vede è necessario considerare la normalizzazione

dato essere il comportamento critico di una certa grandezza rilevante $R(t)$ di tipo

$$R(t) \sim \frac{1}{t^{x_R}} \text{ e per universalità } R(t) \sim \frac{1}{t^{x_R}}$$

come il coeff $A(t)$ uguale ad una certa potenza di L piuttosto che ad una f generica.

Per il compo h è la stessa cosa visto che il comp critico si ha per $h=0$

Inoltre definendo la funzione $a(t)$ come:

$$\Psi(t, h) = \frac{1}{a(t)} \Psi(\bar{t}, \bar{h}) \quad \text{--- II e III legge di scala ---} \quad \text{perché } \Psi=0 \text{ al punto crit. } \bar{\Psi}=0$$

$$f_{\Psi} = \frac{1}{a(t)^2} f_{\Psi}(\bar{t}, \bar{h}; \frac{\bar{r}}{L}) \quad \text{perché } f_{\Psi} = \langle (\Psi - \langle \Psi \rangle) (\Psi - \langle \Psi \rangle) \rangle$$

dove si mettono i λ che NON INTERESSANO al punto critico allora $a(t)$ deve assumere la forma

$$a(t) = L^{x_{\Psi}} \quad \text{con } x_{\Psi} \text{ tale che}$$

$$\int h(x) \Psi(x) dx \text{ sia ADMISSIBILE PER } \beta=1 -$$

Se fanno i rapporti in unità di temperatura β dove h e Ψ sono due dati in unit β la forma sopra deve essere adim. equiv

$$\left[\int L^{x_h} \bar{h} L^{x_{\Psi}} \Psi(\bar{t}, \bar{h}) d\bar{x} \right]_{\text{dimens}} = L^{-x_h - x_{\Psi} + d}$$

ovvero

$$x_h + x_{\Psi} - d = 0$$

che mostra come SOLO 2 PARAM. INDIP SONO INTRODOTTI NEWTON.

Sostituiamo l'espressione di Ψ quanto ad ora sostituiamo

$$\Psi(t, h) = L^{x_{\Psi}} \Psi(L^{x_t} t; L^{x_h} h)$$

Le leggi fisiche NON DEVONO CAMBIARE L dove:

$$\Psi(t, h) = t^{x_{\Psi}/x_t} \Psi_1\left(\frac{h}{t^{x_h/x_t}}\right) \quad \text{--- omogeneità per il parametro } h$$

$$\Psi(t, h) = h^{x_{\Psi}/x_h} \Psi_2\left(\frac{t}{h^{x_t/x_h}}\right)$$

infatti:

$$L^{x_{\Psi}} \Psi(L^{x_t} t; L^{x_h} h) = L^{x_{\Psi}} (L^{x_t} t)^{x_{\Psi}/x_t} \Psi_1\left(\frac{L^{x_t} t}{(L^{x_h} h)^{x_t/x_h}}\right) = t^{x_{\Psi}/x_t} \Psi_1\left(\frac{t}{h^{x_t/x_h}}\right) = \Psi(t, h) \text{ ritorna la 1}^a$$

$$L^{x_{\Psi}} \Psi(L^{x_t} t; L^{x_h} h) = L^{x_{\Psi}} (L^{x_h} h)^{x_{\Psi}/x_h} \Psi_2\left(\frac{L^{x_t} t}{(L^{x_h} h)^{x_t/x_h}}\right) = \Psi(t, h) \text{ ritorna la 2}^a$$

Da questa proprietà si possono dedurre delle relazioni per β (indice critico per $h=0$) i fatti:

SI A PER $h \rightarrow 0$ $\Psi_1(\infty) < \infty$ allora

$$\Psi(t, 0) \sim t^{x_{\Psi}/x_t} \text{ da cui}$$

$$\frac{x_{\Psi}}{x_t} = \beta$$

l'indice critico β si identifica guardando il comportamento di Ψ col campo

SI PER $t \rightarrow 0$ $\Psi_2(0) < \infty$

$$\Psi(0, h) \sim h^{x_{\Psi}/x_h} \text{ da cui}$$

$$\frac{x_{\Psi}}{x_h} = \frac{1}{\delta}$$

Per questo riguarda la fad correlazione

$$f_{\Psi}(t, h; \bar{r}) = t^{2 \frac{x_{\Psi}}{x_t}} f_1\left(\frac{\bar{r}}{t^{1/x_t}}; \frac{t}{h^{x_t/x_h}}\right) \quad \text{--- omogeneità per } \bar{r}$$

Imponiamo

$$L^{-2\alpha} f_q(L^{x_t} t, L^{x_n} h, \frac{r}{L}) = L^{-2\alpha} (L^{x_t} t)^{2\frac{x_q}{x_t}} f_1\left(\frac{r}{L(L^{x_t} t)^{1/x_t}}, \frac{L^{x_t} t}{(L^{x_n} h)^{x_t/x_n}}\right)$$

$$= t^{2\frac{x_q}{x_t}} f_1\left(\frac{r}{t^{1/x_t}}, \frac{h}{t^{x_t/x_n}}\right) = f_q^{(n)}(\bar{r} h t)$$

Coidentifica i impatti:

$f_q^{(n)}(\bar{r}) \sim f\left(\frac{\bar{r}}{\varepsilon}\right)$ ma f_1 è funzione di $\frac{r}{t^{1/x_t}}$

dove $\varepsilon \sim t^{-1/x_t}$ e quindi:

$$x_t = \frac{1}{\gamma}$$

SIGNIFICAZIONE
E' MISURATA IN TERMINI
DI IMPATTI
 $\varepsilon \sim t^{-1/x_t}$ e $t \sim \varepsilon^{-x_t}$

L'eq di Kadanoff per l'omogeneità di f_q è valida solo se si trascurano le correzioni a breve scala - la trasformata di Fourier di f_q è così:

$$\int d^d x f_q(x) e^{-iqx} \approx \int d^d x f_q(x) = (q \rightarrow 0; r \rightarrow \infty)$$

$$= t^{2\frac{x_q}{x_t} - \frac{d}{x_t}} \int dy f_1(y) \quad \text{dove } y = \frac{x}{\varepsilon} \text{ e } \varepsilon \sim t^{-\frac{1}{x_t}} \text{ ed anche}$$

$$2\frac{x_q}{x_t} - \frac{d}{x_t} = 2\beta - d\gamma$$

$$= t^{2\beta - d\gamma} \hat{f}_1(q t^{-1/x_t}, t/h^{x_t/x_n})$$

$$f_q(q) = t^{2\beta - d\gamma} f_1(q t^{-1/x_t}, \frac{t}{h^{x_t/x_n}})$$

OMogeneità per la trasformata di Fourier di f .

Per quanto riguarda l'energia allora:

$$F(h) = t^{2d} F_1\left(\frac{t}{h^{x_t/x_n}}\right)$$

OMogeneità per l'energia libera *

Imponiamo

$$F(h) = L^d F(\bar{\varepsilon} \bar{h}) = L^d (L^{x_t} t, L^{x_n} h) =$$

$$= L^{-d} (L^{x_t} t)^{2d} F_1\left(\frac{L^{x_t} t}{(L^{x_n} h)^{x_t/x_n}}\right) = t^{2d} F_1\left(\frac{t}{h^{x_t/x_n}}\right)$$

Derivando 2 volte questa relazione

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (t^{\frac{d}{x_t}} F_1(\frac{t}{h^{x_t/x_n}})) = \frac{d}{x_t} (\frac{d}{x_t} - 1) t^{\frac{d}{x_t} - 2} F_1 +$$

$$+ 2 \frac{d}{x_t} t^{\frac{d}{x_t} - 1} \frac{\partial F_1}{\partial t} + t^{\frac{d}{x_t}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}$$

Se $F_1(\infty) < \infty$, $F_1'(\infty) < \infty$ ed $F_1''(\infty) < \infty$ allora per $h=0$ $\partial^2/\partial t^2 F$ va come t alla $d/x_t - 2$ degree.

$$\alpha = 2 - \frac{d}{x_t}$$

Resta così invariato anche α

Dall'omogeneità deriva che per i 2 indici d e d' ed anche per l'indice γ si può determinare (derivando la f di correlazione rispetto alle variabili x e t)

$$\begin{aligned} d &= d' & 1 & \text{--- LEGGI DI SCALA PER GLI INDICI CRITICI} \\ \gamma &= \gamma' & 2 \\ \nu &= \nu' & 3 \end{aligned}$$

PERCHE' INTORNO AD UNA SINGOLARITA' DI UNA FUNZIONE IN 2 VARIABILI SI PUO' SEMPRE ESTENDERE UN RACCORDO SUI DI CUI LA FUNZIONE E' CONTINUA

dalla eq $x_q + x_n = d$ dividendo per x_t si vede $\beta = x_q/x_t$ e $\delta = x_n/x_t$

$$\beta + \beta\delta = \gamma d \quad 4$$

ed alla eq di scaling d e γ :

$$\gamma d = 2 - \alpha \quad 5$$

Se si ricorda che η definito sopra è tale che $f_q(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$ per $t=0$ ed $h=0$ con $\eta = \alpha$.

~~$f_p(q) = t^{2\beta-2d}$~~
 ~~$f_1(q, t) = t^{-1/2}$~~
 Per h, t che sono zero con q studiamo $f(h, q)$
 sulle curve
 $q = t^2 \quad t = h^{x_{t/h}}$ con $h = t^{2\beta}$
 $f_p(q) = t^{2\beta-2d} f_1(q t^{-1/2}, \frac{h}{h^{x_{t/h}}})$

Sulle curve
 $f_p(q) = q^{\frac{2\beta-2d}{2}} f_1(1, 1)$ dove

$$2-\eta = \frac{2d-2\beta}{2} \quad 6$$

L'indice γ si identifica facendolo semplice x
 la f da come che $\beta=1$ la segue generalizz:

$f_p(q) \sim t^{2\beta-2d}$ per $q \rightarrow 0$ ed ora

$$\gamma = 2d - 2\beta \quad 7$$

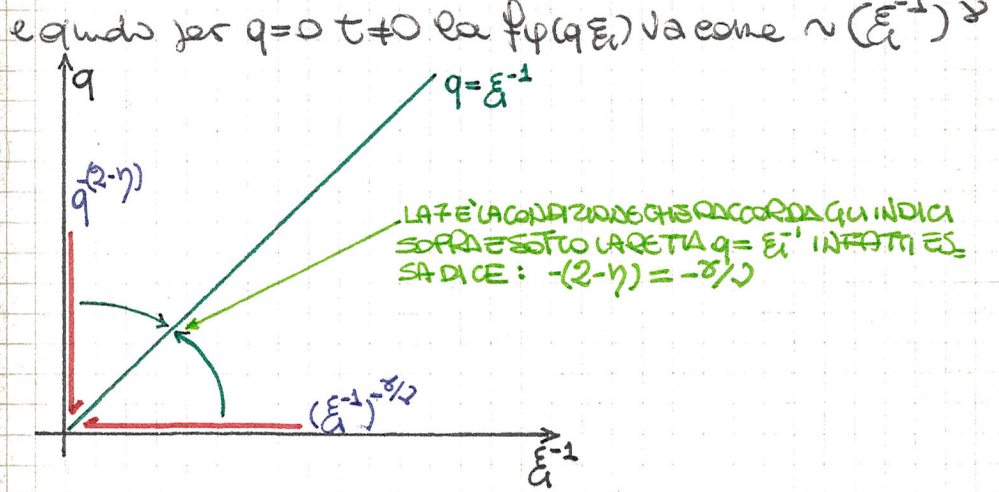
Queste 7 relazioni legano fra loro gli 9 indici critici
 ed $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta$ dove solo 2 indici critici sono
 NO INDIPENDENTI

Risolviamo la 7 come (facendo uso della 6)

$$(2-\eta)\gamma = \gamma$$

ora esprime una CONDIZIONE DI RACCORDO PER
 LA F DI CORRELAZIONE SULLA RETTA $q = \xi^{-1}$

Consideriamo $f_p(q, t)$ questa è la risposta del sistema
 e per $q=0 \quad t \neq 0$ va come
 $f_p(0, t) \sim t^{-\gamma}$
 Esploriamo i termini di
 interscambio di come
 questa va come
 $\xi^{-1} \sim t^2$ dove
 $t \sim (\xi^{-1})^{1/2}$



Questa è una PROPRIETA' DI RACCORDO DELLE FUNZIONI ORTOGENEE

Una formulazione molto più per lo scaling è:
 LA DIVERGENZA IN ξ E' LA SOLA RESPONSABILE DELLE DIV.
 IN t DUNQUE ξ E' LA SOLA LUNGHEZZA RILEVANTE
 TRASFORMAZIONE DI SCALA SIGNIFICA ESPRIMERE TUTTO IN
 TERMINI DI ξ :

Forme generiche tra le scale INTERVALI di lunghezza
 e numeri d'ordine si esprimono

$$\Delta x \rightarrow \Delta x' = L^{-1} \Delta x$$

$$q \rightarrow q' = L q$$

dove L è il parametro di scala

come al solito infatti:

$$\bar{V} = L^{-d} V$$

le DIMENSIONI DI SCALA per l'ipotesi e per i settori d'onda sono due

$$[\Delta x] = -1 \quad [q] = 1$$

essendo E ESPRIMIBILE DI L nella trasformata generica grandezza A

$$A \rightarrow A' = L^a A$$

$$[A] = a$$

stessa $[E_1] = 1$ tutte le altre grandezze sono espresse in UNITA' DI E_1 (cioè di λ per E_1)

grazie alla formulazione dell'ipotesi di scala data da precedenza la FUNZIONE DI CORRELAZIONE CHE IN GEN. SI PUO' SCRIVERE

$$f_p(q) = f(q \xi_i; \frac{r_1}{\xi_1}; \frac{r_2}{\xi_1} \dots)$$

(dove $r_1, r_2, \dots$ etc sono WNG CHARACTERISTICS MICROSCOPICHE del sistema)

ESPANDENDO IN SERIE DI POT DI $r_1/\xi_1, r_2/\xi_1$ etc POICHE QUESTI PARAMETRI SONO A COLORE PRENDENDO DI QUESTE SERIE LA POTENZA DOMINANTE (la f di correlazione e' buona nei parametri microscopici e quindi in λ si puo' esp. in serie) -

$$f_p(q) = E_1^y [f_1(q \xi_1) + \text{ordini elevati di } E_1^{-1}]$$

$$f_p(q) \approx E_1^y f_1(q \xi_1) \quad \text{VICINO AL PUNTO CRITICO}$$

con $y = -\sum_i x_i$ dove ponendo $\lambda_i = r_i/\xi_1$

$$\begin{aligned} f_p(q) &= \lim_{\lambda_i \rightarrow 0} f(q \xi_1; \lambda_i) \approx \tilde{f}_1(q \xi_1) [\lambda_1^{x_1} \lambda_2^{x_2} \dots] = \\ &= \frac{f_1(q \xi_1)}{\xi_1^{-y}} [\pi_i r_i^{x_i}] = E_1^y f_1(q \xi_1) \end{aligned}$$

di qui si diventa PICO LE WNG CHARACTERISTICS MICROSCOPICHE IN UNITA' DI E_1 COME PARAMETRI IRRILEVANTI in questo e solo quello che CONTA E' LA DIPENDENZA DA E_1 da questo si ricavano le leggi di scala infatti

$$\chi = f_p(0) = E_1^y f_1(0) \sim t^{-2y}$$

y E' UN PARAMETRO NON FIX PER LA TEOR. FENOMENOLOGICA e da qui si deduce la relazione

$$y = \gamma$$

y puo' essere successivamente eliminato con δ dove δ e' l'indice η

$$\lim_{q \xi_1 \rightarrow 0} f_p(q) \sim q^{-(2-\eta)} \quad \text{cioe'}$$

$$\lim_{q \xi_1 \rightarrow 0} f_1(q \xi_1) \sim (q \xi_1)^{-(2-\eta)} \quad \text{con } y = 2-\eta = \gamma/\nu$$

SIGNIFICATO DEUTSCHUNG PER LA TEORIA DI LANDAU -

SINGOLA CHE QUINDI CLASSICA SODDISFANO PER $d=4$ LE RELAZIONI DI SCALA

Se relazioni di omogeneita' + la universalita' si estende non tutte secondo la scala non e' da dare la DIMENSIONE SCALA RISP. E_1 DI UNA GRANDezza generica eol hanno tutte la forma

$$\bar{A} = L^{x_A} A$$

Nella teoria di Kadanoff 2 PARAMETRI per esempio x_t ed x_p NON SONO FIX

L'UNICA MANIERA DI DETERMINARLI SAREBBE SAPERE LA FORMA ESPlicita della trasformazione che induce tutto questo:

$$H[\psi_h] \rightarrow \bar{H}[\bar{\psi}_h]$$

LA TEORIA DI LANDAU EQUIVALE A FISSARE QU x_A : PONENDO $x_t = 2$ ESOL CON QUESTA SCELTA SI OTTIENE LANDAU

CAMP IRRILEVANTI PERICOLOSI

Puo accadere che alcuni parametri irrilevanti siano essenziali nella CORRETTA valutazione degli INDICI CRITICI ovvero per esempio:

per $d > 4$ sarebbe portati dalla eq di omogeneita

$$F_L(t\varphi) = t^{d\varphi} F_1\left(\frac{t}{\varphi^{x_0/x_4}}\right)$$

a NON CONSIDERARE i parametri u ed a scrivere

$$F_L = - \int d^d x \left(\frac{1}{2} t \varphi^2 + \frac{1}{4} \varphi^4 + \frac{1}{2} c |m|^2 \right)$$

Si e visto come per il calcolo in APPROX GAUX (che vale per $d > 4$) SI DEVESSIMO CONSIDERARE IL TERMINE IN u (vedi in precedenza che l'eterogeneo compone nella eq GAUX) ED IN PARTICOLARE

per $T < T_c$ $\varphi_0 = \pm \sqrt{-\frac{6t}{u}}$ come si vede ricordando che φ_0 e φ_0^* e dai camb dimensionali naturali

E' da notare che per $d \geq 4$ ALTRI TERMINI DELLO SVILUPPO DI F SONO IRRILEVANTI per esempio il 6° ordine eterogeneo che compaiono in φ^6 :

$$\int a_6 \varphi^6 d^d x \text{ dunque } x_0^6 + 6 x_4 \varphi - d = 0 \text{ sotto } x_4$$

$$x_0^6 = 6 - 2d \text{ IRRILEVANTE GIA' PER } d > 3$$

IL CASO CHE $\frac{x_i}{x_t} = 0$ (CASO MARGINALE) puo portare ad una APPARENTE RIDUZIONE dello scaling con indice critico dipendenti in maniera continua da un parametro.

STRASCE

IL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE

(KARZELSKI 1985)

INTRODUZIONE

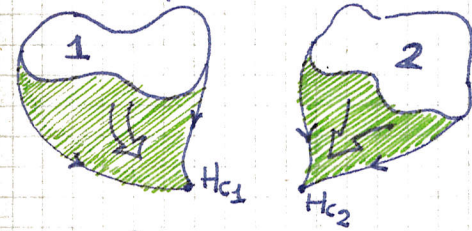
Si e già visto come l'azione di Kadanoff da relata, non corretta AL PUNTO CRITICO, fa un passo ENDOEST. TUTTI GLI INDICI CRITICI (per fenomeni) IL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE FORNISCE LA DESCRIZIONE DELLA TRASFORM. CHE ITERATA SU ∞ PORTA AD OTTENERE IL COMPORTAMENTO DI UN SISTEMA VICINO AL PUNTO CRITICO.

SI Vede CHE TUTTI I SISTEMI CON STESSO d (dim. ensionalita) ed h (n° campi per d'ord) ESISTONO LO STESSO PUNTO CRITICO e definisce le CLASSI DI UNIVERSALITA'.

AL PUNTO CRITICO LA TRASFORMAZIONE LASCIA INVARIATA L'AZIONE. DONQUE IL PUNTO CRITICO E' UN PUNTO FIX PER LA TRASFORM. DI RINORMALIZZAZIONE CHE PERTE E' DI SCALA

$$R H = H \text{ se } H = H_c \text{ (con 2 eccezioni banali ved. dopo)}$$

Dunque PER 2 CLASSI DI UNIV. PER ESEMPLO in un ipotetico spazio ad 2 dimensioni:



Diamo due ragionamenti intuitivi visti meglio in seguito:

Un passo di rinormalizzazione e' una trasformazione ESPlicita ~~canonica~~ canonica considerata per esempio in var

$$H = \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad R_i: \{\sigma_i\} \rightarrow \{\mu_i\}$$

dove $\{\mu_i\}$ sono le variabili di blocco e sotto questa trasformazione

$$R_i H = \tilde{H} = \sum_{ij} \tilde{J}_{ij}(\tau) \mu_i \mu_j$$

LA COST DI ACCOP. NUOVA DIPENDE DALLA TEMPERATURA

Intuitivamente si vede che per un insieme di spin il loro grado di disordine favorito dalla FORZA dell'INTERAZIONE J dipende dalla temperatura ad altissima T_c gli spin sono orientati ad disordine e dopo la FORZA dell'INTERAZIONE J ~~si disordina~~ (???) ricadono a bassa temperatura.

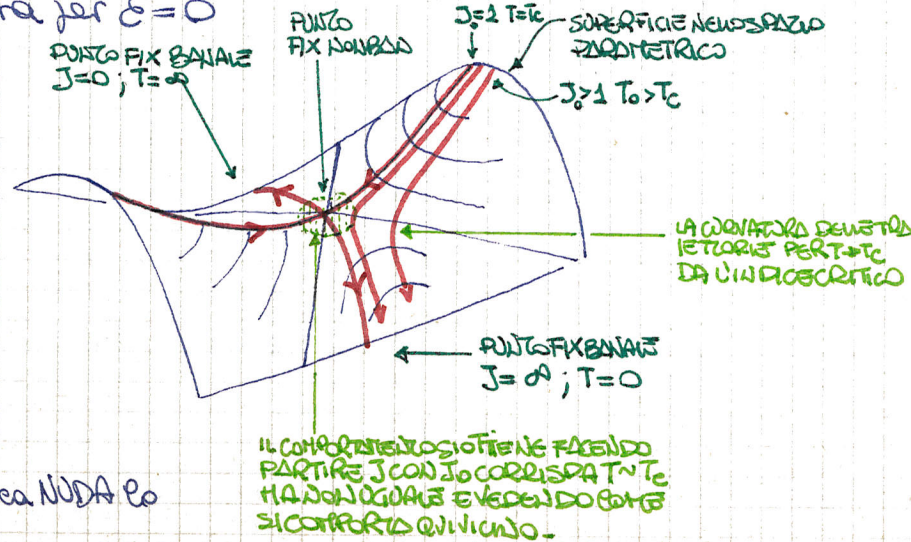
La costante di accoppiamento dipende da T nel senso che dip da $T-T_c$ visto che R dipende da $T-T_c$.

La differenza fra le proprietà di conduzione in mecc. e stat. ~~si~~ ed inel. ~~si~~ non è il fatto che in quest'ultima si normalizza ad 1 solo PARAMETRO la CARICA dell'EL* (o la sua massa) mentre il PRP di NORMALIZZAZIONE normalizza contemporaneamente molti parametri.

Questo perché in el. si può esprimere R senza una normalizzazione UN parametro TRAMITE LA SOLUZIONE ESATTA (che è sconosciuta) del PROBLEMA.

Il mecc. stat. R si ESPRIME IN MANIERA COMPLETA senza bisogno di normalizzazione TUTTI I COST. DI ACCOPP. per tutti le interazioni ex stenti fra i blocchi (e non come per Radonoff con cui derivano solo le interazioni di 1° ordine) è naturale che ciò come del resto in el. di cui il calcolo ESATTO 100% di tutte queste interazioni è impossibile.

Un METODO come quello dei blocchi di spin di Radonoff per ottenere gli indici critici è la ESPANSIONE IN SERIE DI $\epsilon = 4-d$ sulla teoria di London che è vera per $\epsilon = 0$.



* la teoria NUDA è

Il problema è di trovare la trasformazione tale che ASSIMILANTE VIANO T_c ALLA SKALA e che così la frazione invariata.

La trasf. di rinorm. zero stato introdotta per spiegare il comportamento asintotico di scale $\sim m^{-1}$ per i piccoli di sistema dato ad es. nel dim. su scale dell'ordine della distanza di coerenza elettronica cioè dell'ordine della lunghezza d'onda di Compton dell'elettrone $\sim 10^{-10}$ cm.

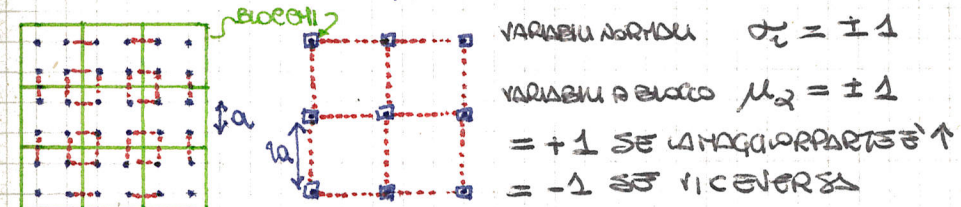
Se la dipendenza della cost. di accoppiamento SCALARE dalla eq. del grad. di rinorm. allora si HA ESATTA OMOSIEDITA' E QUINDI SKALA $\sim T_c$ ed al POSTFIX della TRASFO per T/T_c .

TRASFORMAZIONE DI RADONOFF E CORREZIONI SULLA PARTE NUDA DI L'ANLISI (LA PARTE NUDA DI L'ANLISI NON CAVALGOSA*)

Consideriamo un simplex modello di Ising

$$H = -J \sum_i \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

$$(\beta = 1 \quad H = \frac{H_{vero}}{RT} \quad J = \frac{J_{vero}}{RT})$$



L'interazione $J \sum_i \sigma_i \sigma_j$ di Ising è fra i vicini Radonoff considero l'interazione fra i blocchi dello STESSO TIPO.

Se variabili di blocchi di Radonoff non sottostanno a fluttuazioni sono 0+1 o -1 come se tutti gli spin fossero "LA FOSSERO" -

Nel nostro modello la scalatura S di $2a$ (se non si contano gli effetti di superficie) dare

$$\frac{a}{S} \rightarrow \frac{2a}{2J}$$

* Questo giudizio dato da Lifshitz è motivato dalla sua invidia verso de Maistre che lo portava a sfogarsi contro di lui su altri argomenti -

infatti su 1 faccia del blocco si sciolgono 2 spin che portano in contributo al momento $\pm 2J$ ferite rispetto al blocco vicino. SOLO TUTT'ALTRO in gen

$$J' = LJ$$

"RIDORNI" DI KADANOFF

Una trasfo come questa deve lasciare invariato il sistema ma deve per la CONSERVAZIONE ENERGIA

$$E_1(J') = \frac{1}{L} E_1(J) \quad (\text{come un'equazione sotto una scalatura dei operatori di Kadanoff})$$

quando $t=0$ ed $h=0$ anche $t'=0$ ed $h'=0$ e

$$E_1(LJ_c) = \infty = \frac{1}{L} E_1(J_c) \quad \text{dove } J_c = \frac{J_{\text{vero}}}{KT_c}$$

Così deve essere $E_1(J_c) = \infty$ e

$$J'_c = LJ_c = J_c \quad \forall L$$

cio si verifica solo se $J_c = 0$ oppure $J_c = \infty$

cioè per $T_c = 0$ (1) oppure $T_c = \infty$ (2)

LA RIDUZIONE DI KADANOFF (COS' È) (PERTINENTE)
UNA TRASFORMAZIONE HA SOLO 2 PUNTI FIX BANALI
 $T_c = 0$ $T_c = \infty$

1) PER $T=0$ il sistema è del tutto ordinato (classicamente) e non è un vero punto critico perché $E_r = 0$ infatti
 $\langle \phi(r) \phi(0) \rangle = \psi^2 = 0 \quad \forall r$

(il valore $E_r = 0$ è in un certo modo analogo al valore $E_r = -\infty$ in tutte e due i casi per $r \rightarrow \infty$ $f(r) = \cos r$)

2) PER $T=\infty$ il sistema è disordinato (caso) e il valore di E_r è il minimo
 $\psi^2 = 0 \quad \langle \phi(r) \phi(0) \rangle = \langle \phi(r) \rangle \langle \phi(0) \rangle = 0 \quad E_r = 0$

Kadanoff che non era un eretico con le sue idee che l'interazione fra i blocchi deve essere più generale.

$$J' = f(J) \quad \text{con } f \text{ invertibile (da Kadanoff)}$$

cio è uguale a prendere NON AUMENTATI gli spin in 1 blocco; per la contemporaneità critica

$$J'_c = f(J_c)$$

ED INTANTO QUESTO SCORRERE SE $h \neq 0$ O È RESISTENTE

$$\begin{cases} J' = f_1(J_h) \\ h' = f_2(J_h) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} J'_c = f_1(J_{c0}) \\ 0 = f_2(J_{c0}) \end{cases}$$

facendo di meno $h=0$

IPOTESI CRITICA SU F

Si suppone che ANALITICA e cioè non è in contraddizione con il comportamento critico in effetti le non analitici dei componenti solo con si domando qualcosa che coinvolgono l'intero reticolo e non i semplici blocchi - la analiticità significa avere interazioni di blocco INFINITO DI VOLUME -

Con ciò:

$$J' - J_c = \left(\frac{\partial f}{\partial J} \right)_{J=J_c} (J - J_c) + O(|J - J_c|^2) \quad \text{perché } J'_c = J_c$$

$$\frac{E_1(J')}{E_1(J)} = \frac{1}{L} \quad \text{per } T \sim T_c \quad \text{si riduce ad una scalatura}$$

$$E_1 \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad \text{e} \quad |J - J_c| \sim |T - T_c|^{+1} \quad (J = \frac{J_{\text{vero}}}{KT})$$

interazione di J dove

$$E_1 \sim |J - J_c|^{-\nu} \quad \text{ergo conservando solo gli ordini 1 in } J - J_c$$

$$\frac{E_1(J')}{E_1(J)} = \left[\frac{f(J) - J_c}{J - J_c} \right]^{-\nu} = \frac{1}{L} \quad \text{ma } f(J) - J_c = \left(\frac{\partial f}{\partial J} \right)_{J_c} (J - J_c)$$

dove

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial J} \right)_{J=J_c} \right]^{-\nu} = \frac{1}{L}$$

$$\nu = \frac{\ln L}{\ln \left(\frac{\partial f}{\partial J} \right)_{J=J_c}}$$

PENDENZA DELLO SPAZIO
PARAMETRICO INTORNO AL PUNTO
CRITICO.

Se ci sono più costi di accoppiamento che gli indici critici
ed sono prop all'inverso del WQ. del grado della
funzione J^* .

Intervallo di temperatura:

$$|J^* - J_c| \sim t' \quad |J - J_c| \sim t \quad \text{dunque}$$

$$\frac{\xi(t')}{\xi(t)} = \left(\frac{t'}{t} \right)^\nu = \frac{1}{L} \quad \text{dove}$$

$$t' = L^{1/\nu} t$$

Si ottiene la legge asintotica di scala

Se $h \neq 0$ bisogna considerare il sistema di stato
si deve diagonalizzare e usare come conoscere
gli altri modi critici

In generale dati $\{p_i\}$ parametri come J ed h si ha
una trasformazione

$$p'_i = f_i(\{p_j\})$$

Conseguenza significativa

$$p'_i = f_i(\{p_j\}) \approx \sum_j a_{ij} p_j + \sum_{j,k} b_{ijk} p_j p_k + \dots$$

$$\text{con } a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_j} \right)_{p_j=p_j^c} \quad \text{diagonalizzando}$$

$$q'_i = A_{ii} q_i$$

e se per il modo i si ha $\epsilon_i \rightarrow 0$ dove vale lo scaling

$$\frac{q'_i}{A_{ii}} = \frac{1}{L^{x_i}} \quad x_i = \text{dimensione scalare di } q_i; \text{ da cui}$$

$$x_i = \frac{\ln L}{\ln A_{ii}}$$

Caso generale

HAMILTONIANO DI LANDAU

106

Consideriamo un particolare caso:
sia $n=1$ (n° comp per d'ord.) e consideriamo il funzionale
su cui agisce l'operatore della FORTA di London

$\hat{\phi}_i$ è l'osservabile microscopico che costituisce un
campo stocastico (all'equilibrio all'elementi e onde
in processo stocastico)

La probabilità di una configurazione microscopica $\{\hat{\phi}_i\}$ è:

$$P(\{\hat{\phi}_i\}) = \frac{e^{-H[\{\hat{\phi}_i\}]}}{Z}$$

CI SARANNO DEI PROBLEMI PER LA NORMALIZZAZIONE
QUESTA DOVREBBE ESSERE TALE CHE IN OGNI TRAS-
FORMAZIONE CONSERVI SI BONA LA $P(\phi_i)$
CIOE' NON LA SPACCI CHI A ZERO NE LA RENDI
SINGOLARE TIPO δ

L'ambiguità di Landau non è altro che la controparte
microscopica del funzionale F_L dunque:

$$H[\{\hat{\phi}_i\}] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} t \hat{\phi}^2 + \frac{u}{4!} \hat{\phi}^4 + \frac{c}{2} |\nabla \hat{\phi}|^2 + u_6 \hat{\phi}^6 + u_8 \hat{\phi}^8 + \dots + u_d |\nabla \hat{\phi}|^d \right]$$

FORMA DI LANDAU

$$\text{dove } \int d^d x \leftrightarrow \sum_i \quad \text{e} \quad \hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_i \delta(x - x_i)$$

Lo SPAZIO PARAMETRICO è qui costituito APRIORI da TUTTI
I PARAMETRI: $t; u; c; u_6, \dots; u_8, \dots$ MA SOLO QUELLI RILEVANTI
NEL CONTINUIO DUNQUE (PER $d \geq 4$)

$$\{P_i\} = \{t; u; c\} \quad (\text{per } d \geq 4 \text{ u non è rilevante ma pericoloso})$$

qui costituisce i COSTI DI ACCOPPIAMENTO DI LANDAU

Il comportamento di una rinormalizzazione per $d \geq 4$
dove essere tale che

1) RENDA IRRILEVANTI AL LIMITE $d \rightarrow 4$; $\epsilon_i \rightarrow 0$ $u_6, \dots; u_8, \dots; u$
(questi ultimi pericolosi)

2) RENDA INDIPENDENTE DALLA DIMENSIONALITA' L'HAMILTONIANO
LIMITE CLASSICO

dalle leggi di scala per Landau si ha $[3 \leq d \leq 4]$:

$$x_t^0 = 2 > 0 \text{ RILEVANTE}; \quad x_u^0 = \frac{d-2}{2} > 0 \text{ RILEVANTE}$$

$$x_u^0 = 4 - d = \epsilon \text{ RILEVANTE PER } d < 4, \text{ IRRILEVANTE PER } d > 4$$

ed anche

$$x_6^0 = 6 - 2d \quad x_4 = 2 - d \quad \text{IRRILEVANTI PER } d > 3$$

esprimendo in termini di ε

$$x_6^0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad x_4^0 = 2 \quad x_u^0 = \varepsilon$$

La funzione $H[\{\hat{\psi}_i\}]$ ha la forma di London, ma le ψ non sono i.e.q. di LND che sono possibili di fluttuare e l'indice critico che tiene conto delle fluttuazioni nella funzione di correlazione per $q \rightarrow 0$; $\varepsilon \rightarrow \infty$ e η da considerare non di scala. Che siano vere solo al limite

$$2 - \eta = d - 2 \frac{\beta}{\gamma} \quad \beta = \frac{x_6}{x_4} \quad \gamma = \frac{1}{x_6} \quad \eta = 2 - d + 2x_4$$

l'indice x_4 scritto sopra il η che è vero LNDO PERT = T_c e ora si presenta come il valore di LNDAD + una correzione

$$x_4 = x_4^0 + \frac{1}{2} \eta = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta}{2}$$

Identificando la costante di scala $x_4 = 1/\nu$ dove ν è il suo valore vero

$$x_4 = x_4^0 + \Delta x_4 = 2 + \Delta x_4$$

per cui esso rigorosamente a $d=4$ è zero dove

$$x_u = 0 + \varepsilon = \varepsilon$$

Si hanno delle correzioni alla PARTENIDA di LNDAD DATES DA VALORI DI η e Δx_4 ; E SARA IL PARAMETRO DI SVILUPPO

L'indice η assume ora un significato obo e la parte ADOMATA sull'andamento a scala costante da x_4 del campo classico $\psi^0(x)$.

NOTA IMPORTANTE

Nell'homologal NON SI TRASCURANO GLI EFFETTI DI $\hat{\psi} > 4$ PERCHE' ψ E' PICCOLO MA PERCHE' SONO IRRILEVANTI PER $d > 3$ ed è proprio perché si sono CHATULIANDO E NON IL FUNZ. DI LNDAD PERCHÉ E' GIUSTO APPROX UNTEQR. SUI CAMMINI NOI QUESTO LO DOBB. ANDARE FARE! -

VARIABILI DI BLOCCO (FISIKO LA FINE DE XII SEC.)

Costruiamo le variabili di blocco relative ad una cella di spin di lato L se

$$\hat{\psi}_i \text{ oppure } \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}_i \delta(x - x_i)$$

e il campo classico originale si definisce

$$\hat{\psi}_j^{(L)} = \frac{1}{L^d} \left(\sum_i \right) \hat{\psi}_i \quad \text{--- VARIABILI DI BLOCCO ---}$$

$i = \text{INDICE DI SPIN} \quad j = \text{INDICE DI BLOCCO}$
LE SPIN E' CORRISPONDENDO SOLO AGLI SPIN DELLA CELLULA

Se la dimensione reticolare e i momenti saranno trasformato

$$a \rightarrow a' = La \quad q \rightarrow q' = \frac{1}{L} q \quad q'_{\max} = \frac{1}{L} q_{\max}$$

QUESTA $\hat{\psi}^{(L)}$ NON E' LA MEDIA DI $\hat{\psi}$ INTESA IN SENSO STATISTICO MA UNA MEDIA SU N DI OPERATORI MICROSCOPICI

Se si bloccasse la normalizzazione delle variabili di blocco si otterrebbero PROBABILITA' ASINTOTICHE = NON TRIVIALI P(0) ovvero comportamento non triviale per la ρ di transizione (ed è la cosa che accade nel caso di momento precedente) la normalizzazione è scelta in maniera che DIPENDA DA QUALCHE PARAMETRO DELLA TRASFORMAZIONE STESSA.

Una trasformazione di blocco porta una variabile posizione

$$x \rightarrow \frac{x}{L} \quad \text{se } x \text{ è continua}$$

per un reticolo di serto la trasformazione induce una diminuzione dei suoi siti ovvero L'INDICE DI SITO che è la coordinata discreta che si trasforma

$$i \rightarrow \frac{i}{L} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, N$$

Ma questa ultima trasformazione indiciale viene a definire esattamente la forma di blocco con la sua normalizzazione.

$$\hat{\psi}_{i/L} = \left(\frac{x_4}{L} \right) \hat{\psi}_i$$

CORRETTA NORMALIZZAZIONE PER LE VAR DI BLOCCO

PARAMETRO DI TRASFORMAZIONE

Si sarebbe potuto introdurre il parametro indeterminato a e dare la normalizzazione L^3 e si sarebbe poi visto che a coincidere poi con il parametro x_F introdotto nell'andamento statistico a scala -

La trasformazione

$$\{\hat{\phi}_i\} \rightarrow \{\hat{\psi}_i^{(u)}\}$$

INDICE LA TRASFORMAZIONE DEI TRE DI CONFIGURAZIONE

$$P\{\hat{\phi}_i\} \rightarrow P_L\{\hat{\psi}_i\}$$

E UO A SUA VOLTA INDICE LA TRASFORMAZIONE

$$H[\{\hat{\phi}_i\}] \rightarrow H_L[\{\hat{\psi}_i\}]$$

poiché

$$P_L[\{\hat{\psi}_i\}] = \frac{e^{-H_L[\{\hat{\psi}_i\}]}{Z_L[\{\hat{\psi}_i\}]} \quad \text{ed anche} \quad P[\{\hat{\phi}_i\}] = \frac{e^{-H[\{\hat{\phi}_i\}]}{Z}$$

determiniamo queste trasformazioni ediamo la dose di trasformazione:

La probabilità per una generica configurazione $\{\hat{\phi}_i\}$ del blocco si ottiene contraindendo i gradi di libertà presenti in queste e ponendo esplicitamente ϕ_i in funzione delle ψ_i definite prima:

$$P_L[\{\hat{\psi}_i\}] = \int \prod_i d\hat{\phi}_i P[\{\hat{\phi}_i\}] \prod_j \delta(\hat{\phi}_j - L^{-(d-x_F)} \sum_i^{(u)} \hat{\phi}_i)$$

INTEGRARE PER OGNI I SUO GIACCA

ESPRIME LA DEFINIZIONE DI ψ_i

In simboli

$$P_L[\{\hat{\psi}_i\}] = K_L P[\{\hat{\phi}_i\}]$$

a questo punto si potrebbe ottenere gli indici di blocco ed i siti per cui sono tutti espressi nell'insieme che da $i \rightarrow i/L$

La trasformazione di Wilson

TRASFORMAZIONE DI WILSON

$$H_L(\hat{\psi}) = -\ln P_L(\hat{\psi}) - \ln Z_L$$

$$\text{cioè} \quad H_L(\psi) = K_L H(\psi)$$

La trasformazione a scala oltre l'indice di correlazione nei parametri (costi di accoppiamento)

$$\mu_i' = f_i^{(u)}(\{\mu_j\})$$

TRASFORMAZIONE DI WILSON

per esempio per un sistema di tipo di London i parametri che si trasformano

$$t \rightarrow t' \quad u \rightarrow u' \quad c \rightarrow c'$$

e se la trasformazione è buona per m^d volte che $\rightarrow \infty$ dove

$$t' = L^{x_t} t \quad u' = L^{x_u} u \quad c' = L^{x_c} c \quad x_c = 0 \text{ per scelta}$$

TRASFORMAZIONE DI WILSON

Si opera nello spazio reciproco

essendo $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \geq a$ (spaziatura del reticolo)

$$q < q_{MAX} = \frac{1}{a} \quad (q \text{ oppure } K \text{ è il vettore d'onda})$$

Le componenti di Fourier delle variabili casuali $\hat{\phi}_i$ sono

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i k r_i} \hat{\phi}_i$$

essendo inoltre nella trasformazione nello spazio delle coordinate l'integrale esteso solo sulle variabili ϕ_i per i in una cella unitaria

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \leq L a$$

il corrispondente q sarà

$$q > q_{MAX} = \frac{1}{L a}$$

Si eliminano quindi i vettori d'onda superiori ad un certo valore equivochi rispetto per quanto riguarda l'effettualità -

$$P_L(\hat{\psi}) = \int_{\frac{1}{2L} < q < \frac{1}{2}} \Pi_q d\hat{\psi}_q P(\hat{\psi})$$

$$\hat{\psi}_q \rightarrow L^{\frac{d}{2}-x_\psi} \hat{\psi}_{1q}$$

TRASFO DI WILSON

dove per posizione

$$\hat{\psi}_q \rightarrow L^{\frac{d}{2}-x_\psi} \hat{\psi}_{1q}$$

è equivalente alla condizione nello spazio ordinario

$$Z: \hat{\psi}_{1q} = L^{d-x_\psi} \hat{\psi}_q$$

però nello spazio di Fourier il coefficiente è $\frac{d}{2}-x_\psi$ invece di essere $d-x_\psi$ QUESTA È LA CORRETTA DEFINIZIONE che dà punti fissi ben definiti e con questa scelta anche nello spazio $\{q\}$ x_ψ è proprio l'indice di scala per ψ .

Poi come nello spazio ordinario qui si contengono gradi di libertà che si eliminano molte molte variabili di blocco tutti quei vettori d'onda q compresi fra $1/2L$ e $1/L$ ed è soprattutto vero che in fondo $1/L$ quello che determina l'esclusione delle fluttuazioni di q superiori a lunghezza d'onda $< L$.

PROPRIETÀ' DEL GRUPPO DI RINORMAZIONE

a) Vediamo come è il gruppo del TRASFO DI RINORMAZIONE

Consideriamo la trasfo sulle probabilità K_L che dipende da L e da x_ψ dove $\{K_L\}$ è un insieme ristretto

$$P_L = K_L P \quad K_L \text{ OPERATORE INTEGRAL}$$

che soddisfa la proprietà di gruppo

$$K_{LL'} = K_L K_{L'} \quad \text{BICHS} \quad P_{LL'} = K_L K_{L'} P \quad \text{si lega alla propr. a)}$$

Questa trasfo come si è visto riduce la trasfo

$$R_L: H \rightarrow H_L \quad \text{con} \quad H_L = -\ln P_L - \ln Z_L$$

SE NON VI SONO TERMINI COSTANTI NELL'AMMONIANA LA FUNZIONE DI PARTIZIONE SI CONSERVA SOTTO TRASFO DI RINORMAZIONE ATTENDENDO COSTANTI -

Infatti supponiamo per il contrario

$$H(\hat{\psi}) = H(\hat{\psi}) + H_0 \quad \text{dove } H_0 \text{ NON DIP. DA } \psi$$

$$Z = \int \Pi_i d\hat{\psi}_i e^{H(\hat{\psi})} e^{H_0} = e^{H_0} Z(\hat{\psi})$$

In generale $R_L[e^{H_0} Z(\hat{\psi})]$ vedrà l'applicazione di R_L su $\exp \cdot H_0$ e ciò dove internamente non cost

PONENDO $H(\hat{\psi}=0) = 0$ la f.d.s. partizione ψ è l'integrale su tutto e NON HA TERMINI FUORI INTEGRAZIONE E al max R_L la costante per cui cost. inessenziale moltiplicativa:

$$\cancel{R_L} Z_L = e_L Z \quad \text{si lega alla proprietà b)}$$

Con questo:

$$\begin{aligned} R_{LL'} H &= H_{LL'} = -\ln K_{LL'} P - \ln Z = \\ &= -\ln K_L (K_{L'} P) - \ln Z = \\ &= -\ln K_L P_{L'} - \ln Z = \\ &= R_L (H_{L'}) = R_L (R_{L'} H) \end{aligned}$$

dove la cost. moltip. per Z si è posta = 1

$$R_L (R_{L'} H) = R_{LL'} H \quad \text{a) PROPRIETÀ DI GRUPPO}$$

b) Siccome la trasfo del grado di rinormalizzazione è una trasf. rigida di simmetria deve lasciare invariante la fisica e questo è stato perché la f.d.s. partizione è costante a meno di una cost. moltiplicativa inessenziale

$$F(R_L(H)) = F(H) \quad \text{b) INVARIANZA PER TRASFORMAZIONE}$$

c) Trasformazioni R sulle probabilità R sull'anello, una f sui parametri solo diverse rappres. del gr. di RINORMALIZZAZIONE operanti su diversi oggetti. QUESTE RAPPRES. POSSONO UNIFICARSI o meno per

$$\Delta \mu_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial \mu_j} \Delta \mu_j$$

1c) ASSENZA di SINGOLARITÀ STURIE

ed 3 SIGNIFIC. OVA SCELTA PER UN PICCOLO PARAMETRO τ PERCÙ:

$$R_L(H + \tau \Delta H) = R_L(H) + \tau L_L(H) \Delta H \quad (2c)$$

che dice che LE VARIE RAPPRES. DI RG SONO BUONE e come si vede per es per f QUESTO È NECESSARIO PER NON INTRODURRE SINGOLARITÀ STURIE

Un parametro addimensionale per la teoria di conduttività e di cost. di struttura fine è

$$U/\tau \approx 1/2$$

nello spazio originale dei parametri $\mu_i = \{u, \tau, c\}$ questo DIVERGE il gruppo di rinormalizzazione SULLA DISTRIBUZIONE PERTURBATIVA NEGLI INDICI CRITICI DUTTOSTO CHE DEI PARAMETRI e ciò è equivalente che RINORMALIZZ. DELLA CARICA.

Metodi appross. si usano per DETERMINARE L_L e per questo è possibile fare un sviluppo che dai confronti non ANALITICO per le grand. termodynamiche

d) Il gruppo di rinormalizzazione serve per det. i comportamenti critici di un sistema per questo

DEVE ESISTERE UN INSIEME DI PUNTI FIX NON OSFMAN $\{H^*\}$ CONTENENTE ALMENO 1 ELEMENTO

DEVE 3 UN SOTTOINSIEME DI HAMILTONIANE $\{H_e\}$ ATTRATTE DAI PUNTI FIX PER OGNI UNO DEI QUALI

$$R_L(H^*) = H^* \quad \text{e per} \quad \mu_i^* = f_i^{(u)}(\mu^*)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} R_L(H_e) = H^* \quad \lim_{L \rightarrow \infty} f_i^{(u)}(\mu_j) = \mu_i^*$$

1) PUNTO FIX

IL COMPORTAMENTO PER $H = H^*$ SEQUE LE LEGGI DI SCALA CHE SONO LE STESSA $\forall H^*$

LE HAMILTONIANE ATTRATTE DA DIVERSI H^* FORMANO DIVERSE CLASSI DI UNIVERSALITÀ.

Nello spazio dei parametri la relazione di ricorrenza $\{\mu_i\} \rightarrow \{\mu_j\}$ sono simili al moto di 1 punto in uno spazio di fase analogo al comportamento nello spazio funzionale delle ampiezze linearizzando la relazione per $\tau \rightarrow 0$ cioè per $\|H - H^*\| \sim 0$ SI DETERMINA IL CARATTERE DELL'ATTRATTURA H^* ED I SUOI ASSI DI ATTRAZIONE:

Come 1ª cosa si mostra che $L_L' = L_L L_L'$ SOLO PER $H = H^*$

$$R_L(H + \tau \Delta H) = R_L(H) + \tau L_L(H) \Delta H$$

$$R_L'(H + \tau \Delta H) = R_L'(H) + \tau L_L'(H) \Delta H$$

$$R_L' R_L(H + \tau \Delta H) = R_L' [R_L(H) + \tau L_L(H) \Delta H] =$$

$$\text{se } H' = R_L(H) \quad \Delta H' = L_L(H) \Delta H$$

$$= R_L'(H') + \tau L_L'(H') \Delta H'$$

ma R_L È INVARIANTE CHE

$$= R_L'(H) + \tau L_L'(H) \Delta H = R_L'(H + \tau \Delta H)$$

equando da ciò:

$$L_L'(R_L(H)) L_L(H) = L_L'(H)$$

È SOLO SE $R_L(H) = H$ CIOÈ PER $H = H^*$

$$L_L'(H^*) L_L(H^*) = L_L'(H^*)$$

La parte lineare di R è un gruppo solo al PUNTO FIX

QUESTO SIGNIFICA CHE SOLO AL PUNTO FIX LA TRASFORMAZIONE

Impatti separano L_L DIAGONALIZZABILI ed allora la condizione di gruppo è

$$\{\lambda_i^{(u)}\} \text{ AUTOVAL DI } L_L \quad \{\lambda_i^{(u)}\} \text{ AUTOVAL DI } L_L'$$

$$\lambda_i^{(u)} \lambda_i^{(u')} = \lambda_i^{(L_L)}$$

esempio: la funzione generata da L è L' la condizione
azzerare la parte

$$f(xy) = p(x)q(y)$$

$$\text{ovvero } x \cdot y = z$$

$$f(z) = p\left(\frac{z}{y}\right)q\left(\frac{z}{x}\right)$$

La funzione più generale che soddisfa queste è

$$p(x) = x^a \quad q(y) = y^a$$

$$\text{e così } f(xy) = (xy)^a = p(x)q(y) \quad \text{ed è}$$

GLI AUTOVALORI DI $L(H)$ PER $H=H^*$ SONO

$$\lambda_i^{(L)} = L^{x_i}$$

identicamente come si è già visto gli autovalori
di

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \mu_j}\right)_{\mu=\mu^*}$$

CALCOLATI AL PUNTO FISSO SONO L^{x_i} - Ma questo per il calcolo
monito da Radon-P. SODDISFA LA JUNIER SAUTY' SONO
SE GU x_i SONO QUEL DI SCALA.

GLI AUTORETTORE ASSOCIATI SONO INDIPENDENTI DA L perché
come L autorettrici sono solo DIREZIONI DELLO SPAZIO $\{H\}$
sono questi h_i usando questi vettori esprimeremo
il Hsu e l'altro di per.

$$H_{\text{port.}} = \delta H = \sum_i d_i h_i^*$$

$$\text{perché } \|H - H^*\| \sim 0$$

I PARAMETRI d_i SONO I CAMPI SCALARI AL PUNTO CRITICO
E LEGATI A GU EXP x_i INFATTI:

$$R(H^* + \delta H) = H^* + \delta L(H^*) \delta H$$

per $H=H^*$ allora l'OPERATORE A DESTRA È LINEARE IN H^*

così deve essere a SINISTRA e si ha

$$R(H^* + \delta H) = R(H^*) + R(\delta H) \quad \text{e così}$$

$$R(\delta H) = L(H^*) \delta H$$

che è una legge di scala in H

$$R(\delta H) = \sum_i d_i L^{x_i} h_i^* \quad \text{ma}$$

$$R(\delta H) = R(\sum_i d_i h_i^*) = \sum_i d_i' h_i^* \quad \text{equando}$$

$$d_i' = L^{x_i} d_i \quad \delta H = \sum_i d_i h_i^* \quad h_i^* \text{ AUTORETTORE DI } L(H^*)$$

LEGGI ASSINTOTICHE DI SCALA

I CAMPI di LEGATI A $x_i > 0$ SONO I CAMPI RILEVANTI
infatti sotto trasformazione di scala il punto fisso x

$$x_i' = L^{x_i} x_i \quad \text{per } L \rightarrow \infty \quad x_i \text{ SI DISTACCA DA } d_i$$

però δH corrisponde a $d_i h_i^*$ FORTE IL SISTEMA
LONTANO DALLA SUPERFICIE CRITICA (SUPERFICIE DI SQUADRA
I CAMPI RILEVANTI SONO QUEL)

GLI AUTORETTORE h_i SONO $\perp$ ALLA SUPERFICIE (se $x_i > 0$)
al punto fisso i campi associati ai non rilevanti
SONO ZERO.

I CAMPI di LEGATI AD $x_i < 0$ SONO I RILEVANTI

questi determinano il COMPORTAMENTO TRANSIENTE del
sistema sono legati ad autovalori h_i^* // che Sayer
A DE CRITICA SULLA SUPERFICIE CRITICA VARIANO SONO
I CAMPI IRRILEVANTI PER $\|H - H_c\| \sim 0$

La normalizzazione NON CALCOLA IN 4 CASI AUTOVETTORI
ed autorettrici di H_{port} ma A DIFFERENZA dell'idea
di Radon-P. CONSIDERA L'ESISTENZA DI TUTTI I PAR
 $\neq 0$ SOLO AL PUNTO CRITICO I CAMPI con $x_i > 0$
SONO I SOLI CHE CONTANO.

FWT JAZZ (SECONDO LA RINORMALIZZAZIONE)

LET'S DANCE

F. EDZMANN (1982)

Consideriamo la f.d.s. correl. e vediamo come si comporta subendo un trasp. di rinormalizzazione indotta dall'introduzione di variabili blocca.

In variabili normali

$$f_{\varphi}(i, i') = \langle \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_{i'} \rangle_{P(\varphi)}$$

dove $P(\varphi) = \exp - H(\varphi)$. Operando un trasp. di blocchi
 $P(\varphi_i) \rightarrow P_L(\varphi_{i/L})$

$$\langle \hat{\varphi}_{i/L} \hat{\varphi}_{i'/L} \rangle_{P_L} = \int \prod_{\varphi_i} d\varphi_i P_L(\varphi) \hat{\varphi}_{i/L} \hat{\varphi}_{i'/L} =$$

dove φ è un ind. e mut. di blocco esplicit. P_L

$$= \int \prod_{\varphi_i} d\varphi_i \prod_{i'} d\varphi_{i'} P(\varphi) \delta(\varphi_{i/L} - L^{-(d-x_{\varphi})} \sum_i \varphi_i) \hat{\varphi}_{i/L} \hat{\varphi}_{i'/L}$$

dove ricordando la def. di P_L la Π è completa nella Π_{φ_i} in φ_i .

$$R_L[f_{\varphi}] = [L^{2(d-x_{\varphi})} \sum_i \sum_{i'} \varphi_i \varphi_{i'}] = f_{\varphi}(i, i') = f_{\varphi}(i/L, i'/L)$$

ELIMINAZIONE DELLA SOLUZIONE DI CORRRELATIVE

In ogni cella i ind. e i' varia fra gli estremi

$$j - \frac{1}{2}a \leq i \leq j + \frac{1}{2}a$$

e si pone $\leq$ studia il comportamento al punto critico ovvero LA F.P.C. PER TRASFORMAZIONE

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_{i'}| \gg a \text{ o rinormalizz. } |\vec{r}_j - \vec{r}_{j'}| \gg a$$

allora si può applicare l'APPROXIMAZIONE: $\vec{r}_i \sim \vec{r}_j$

ed avendo L^d variabili $\hat{\varphi}_i$ per ogni j le somme fatte su tutte le $f_{\varphi}(i, i')$ costanti

$$R[f_{\varphi}] = L^{2x_{\varphi}} f_{\varphi} \text{ in altre parole}$$

$$f_{\varphi}^{(2)}(\frac{r}{L}; R(H)) = L^{2x_{\varphi}} f_{\varphi}^{(2)}(r, H) \text{ se } r \gg a$$

$$f_{\varphi}^{(2)}(Lq; R(H)) = L^{2x_{\varphi}-d} f_{\varphi}^{(2)}(q, H) \text{ se } q \ll \frac{1}{a}$$

dove $R(H)$ designa i nuovi PARAMETRI.

Questa è valida anche per le funzioni di correlazione a più di 2 punti

Il parametro x_{φ} (parola senza un significato) deve essere scelto in modo tale che UN'ITERAZIONE ∞ DELLA TRASFORMAZIONE PER $H=H_c$ PORTI IL SOSTANZIAMENTO FIX NON BALANCE (3 punti fix ben. $T=0$ $T=\infty$ hen $\varepsilon_i=0$ e non $\varepsilon_i=\infty$) =

* SE H È SULLA SUPERFICIE CRITICA $H=H_c$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-2x_{\varphi}} f_{\varphi}^{(2)}(\frac{r}{L}; R(H_c)) = L^{-2x_{\varphi}} f_{\varphi}^{(2)}(\frac{r}{L}; H^*)$$

* Inoltre la rinormalizz. deve condurre invariato in sistema (cella si sposta) allora

$$f_{\varphi}^{(2)}(r, H) = L^{-2x_{\varphi}} f_{\varphi}^{(2)}(\frac{r}{L}; R(H)) \quad \forall L \text{ dove esiste}$$

$$f_{\varphi}^{(2)}(r, H) = L^{-2x_{\varphi}} f_{\varphi}^{(2)}(\frac{r}{L}; R(H)) \text{ per } L \rightarrow \infty$$

facendo $H=H_c$

$$f_{\varphi}^{(2)}(r, H_c) = L^{-2x_{\varphi}} f_{\varphi}^{(2)}(\frac{r}{L}; H^*)$$

SE $f_{\varphi}^{(2)}(1; H^*)$ È FINITA x_{φ} È LA DIMENSIONE-SCALA PER φ in patri:

$$r=L \quad f_{\varphi}(r, H_c) = \frac{1}{L^{2x_{\varphi}}} f_{\varphi}(1, H^*)$$

ma l'indice fenomenologico per $f_\psi(r)$ $r \rightarrow \infty$ è

$$f_\psi(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \quad (\text{decadenza } 1/r^{d-2} \text{ } d=3)$$

dunque:

$$2x_\psi = d-2+\eta$$

$$x_\psi = \frac{d+\eta}{2} - 1$$

come risulta dalla teoria scaling questo è la dim scala per ψ .

Nello spazio degli impulsi:

$$f^{(2)}(r+He) = L^{2x_\psi-d} f(Lq; R(He)) \text{ per } L \rightarrow \infty$$

ovvero

$$f^{(2)}(r+He) = L^{2x_\psi-d} \psi(Lq; H^*)$$

$$\text{equival per } L = \frac{1}{q} \text{ e per } q \rightarrow 0 \text{ o}$$

$$-2x_\psi + d = -\eta + 2 - \eta$$

La normalizzazione dipende da x_ψ è stato dimostrato quella giusta per $P^{(2)}$ in STRESS REGION. VALE PER η M DOB PER MATO' E EQUIVALENTE ALL'OSTERU PAZIOE DEUA F DI PARTIZ. IN FATTI QUEST'ULTIMA È L'AGGREGATE DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE

$$f^{(n)} = \frac{\delta^{(n)}}{\delta \psi(r_1) \dots \delta \psi(r_n)} \ln Z[\psi(r_1) \dots \psi(r_n)]$$

x_ψ è il parametro associato al significato, ma LA SCALAZIONE vediamo come I VERI PUNTI CRITICI SONO DETERMINATI SOLO ALCUNI INDETERMINATI x_ψ

Il punto critico si determina dalla DIVERGENZA in una sola RISPOSTA:

$$\delta \psi(r) = \int f_\psi(r) \delta h(r) dr \quad \chi(1) = \frac{\delta \psi(r)}{\delta h(r)}$$

La X STATICA si ottiene come UNITÀ PER $q \rightarrow 0$

$$\chi = \lim_{q \rightarrow 0} f_\psi(q) \propto \frac{1}{q^{2-\eta}} = \frac{1}{q^{-2x_\psi+d}}$$

ESSA DIVERGE SOLO PER

$$1) \eta < 2 \quad \text{ovvero} \quad x_\psi < \frac{d}{2} \quad \text{PUNTI CRITICI}$$

e per:

$$2) \eta \geq 2 \quad x_\psi \geq \frac{d}{2} \quad [\text{in pratica } x_\psi = \frac{d}{2} \text{ PUNTI CRITICI BASSI}]$$

si ha un comportamento non divergente

1) Nel caso 1) x_ψ ha la sola funzione di ~~RENDERE~~ DEFINITA LA

$$P_0(\psi) = \lim_{L \rightarrow \infty} P_L(\psi)$$

ovvero di FARSI CHE È UN PUNTO FIX DEL BASS

$$P_0(\psi) = R_L(P_0(\psi)) \quad \forall L$$

2) Nel caso 2) la P SI MANTIENE SEMPRE GAUSSI e cioè IL CAMPO STOCASTICO $\psi(r)$ È NORMALE con

$$\langle \psi^2 \rangle = N \omega^2 \quad \text{dove } \omega^2 = \langle \psi_i \rangle \text{ per } \omega^2 \text{ costante A VALORE NON ZERO (h=0)}$$

$$\langle \psi \rangle = \langle \psi \rangle = 0$$

Considerando il caso 2) si vede che DATA UNA VARIABILE CASUALE DI BLOCCO

$$\hat{\psi}_N = \sum_i \psi_i \quad \text{NON NORMALIZZATA}$$

PER FAR SI CHE ψ LA $P_N(\psi)$ SIA SEMPRE SIGNIFICATIVA $\forall N$ DEVE DEFINIRSI

$$\hat{\psi}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \psi_i$$

Imp. 2011

Sono φ_i indipendenti e talche

$$\langle \hat{\varphi}^2 \rangle = \sigma^2 \text{ indep da } i \text{ naturalmente}$$

$$\langle (\sum_i \hat{\varphi}_i)^2 \rangle = N \sigma^2 \text{ ergo}$$

$$\frac{\sqrt{\langle \varphi(\omega)^2 \rangle}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ FWTWAZIONI NORMALI PER LA VAR NON NORMAL. } \varphi(\omega) \text{ DI BLOCCO}$$

Quindi si definisce indice

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \hat{\varphi}_i$$

Questa ha SQM che non dipende da N e calcolando $\langle \hat{\varphi}(\omega)^2 \rangle$ (essendo la media) si distribuisce come una GAUSS.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\hat{\varphi}(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\varphi(\omega)^2}{2\sigma^2}}$$

ANCHE NEL CASO DI VARIABILI DIPENDENTI SE LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE E' FINITA LE FWTWAZIONI SONO NORMALI

$$\text{Se } \varphi(\omega) = \sum_i \hat{\varphi}_i$$

$$\langle \varphi^2 \rangle = \langle \sum_i \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_i \rangle = \sum_i \langle \varphi_i^2 \rangle + 2 \sum_{i < j} \langle \varphi_i \varphi_j \rangle =$$

$$\text{se } |i-j| = r \text{ per } r \text{ indipendente}$$

$$= N f_\varphi(0) + 2 \sum_{r=1}^N (N-r) f_\varphi(r)$$

Se $f_\varphi(r) < \infty \forall r$ allora anche stavolta

$$\frac{\sqrt{\langle \varphi^2 \rangle}}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

115
Nel nostro caso N ora è volume ed è menzionabile allora
il numero di siti in cella L^d dove

SE IL SISTEMA NON E' CRITICO IL FATTORE DI NORMALIZZAZIONE
VARIABILI DEL FATTOR x_φ SI FISSA ESSERE

$$L^{x_\varphi} = L^{d/2} \Rightarrow x_\varphi = \frac{d}{2}$$

E VICEVERSA - *

Con il nostro caso (1) $f_\varphi(r)$ DIVERGE ed aggiunge
una parte all'exp in N

$$\sum_r (N-r) f_\varphi(r) \sim \sum_r (N-r) N^{-\frac{2x_\varphi}{d}}$$

$$\text{tante } f_\varphi(r) = L^{-2x_\varphi} \underbrace{f_\varphi\left(\frac{r}{L}; H^*\right)}_{\text{è una cost.}}$$

ma allora secondo se r si ha

$$\langle \hat{\varphi}^2 \rangle \sim N^{2 - \frac{2x_\varphi}{d}}$$

MA E' NEL CASO 1 dove $x_\varphi < \frac{d}{2}$ cioè: $2 - \frac{2x_\varphi}{d} > 1$

equando

$$\frac{\sqrt{\langle \varphi^2 \rangle}}{N} \sim N^{1 - \frac{2x_\varphi}{d}} \text{ con } 1 - \frac{2x_\varphi}{d} > 0 \rightarrow \infty$$

mentre NEL CASO NON CRITICO E' A COSTANTE dove
PER UN SIST. CRITICO NON VALE IL TEOREMA CENTRALE

PER UN SIST. CRITICO LE VAR SUB-TERMINALI ACCOP.

PER UN SIST CRITICO LA DISTRIBUZIONE NON E' GAUSS

* In questo caso si può ricordare la def di sub-blocco:

$$\hat{\varphi}_{\frac{L}{2}} = \frac{1}{L^{d-x_\varphi}} \sum_i \hat{\varphi}_i \text{ se } x_\varphi = \frac{d}{2} \quad \hat{\varphi}_{\frac{L}{2}} = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_i \hat{\varphi}_i$$

PUNTI FIX GAUX

Consideriamo il modello di Landau:

$$H(\hat{\psi}) = \frac{1}{2} \int d^d x \left[t_0 \hat{\psi}^2 + \frac{u}{4 \cdot 3} \hat{\psi}^4 + c (\nabla \hat{\psi})^2 - h \hat{\psi} \right]$$

Lo spazio parametrico è $\{\mu\} = (t_0, u, c)$ ed anche h .
 Non è la temperatura dovrà essere identica a zero costante
 per ora è un parametro

$\hat{\psi}$ è a più componenti $\hat{\psi}^2 = \sum_i \hat{\psi}_i^2$ m-componenti

nello spazio R come è il q è stato:

$$\int d^d x t_0 \hat{\psi}^2 + c (\nabla \hat{\psi})^2 = \sum_{q < q_{max}} \sum_i (t_0 + c q^2) |\hat{\psi}_{qi}|^2$$

$$\int d^d x \hat{\psi}^4 = \int d^d x \sum_{ij} \hat{\psi}_i^2 \hat{\psi}_j^2 = \sum_{qq'q''} \sum_{ij} (\hat{\psi}_q \hat{\psi}_{q'} \hat{\psi}_{q''} \hat{\psi}_{-q-q'-q''})_{ij} L^{-d} *$$

$$\int d^d x \hat{\psi} = \int d^d x \psi_i = \int_{q=0} \psi_{q=0} L^{d/2}$$

$$H(\psi) = \frac{1}{2} \left[\sum_{iq} (t_0 + c q^2) \psi_{q,i} \psi_{-q,i} + \frac{u}{4 \cdot 3} \sum_{ijqq'q''} \psi_{q,i} \psi_{q',i} \psi_{q'',j} \psi_{-q-q'-q'',j} - L^{\frac{d}{2}} h \psi_0 \right] \text{ dove } qq'q'' < q_m$$

Applicando la trasformata di Fourier induce matrice nella probabilità

$$e^{-H(\psi)} \xrightarrow{R.G.(\psi)} e^{-H_L(\hat{\psi}) - F_L^0}$$

dove $e^{-F_L^0}$ sta a rappresentare una costante moltiplicativa
 generata da tutto che non entra tutte le con si da
 restando fattori precedenti.

* per ψ porta in fattore $L^{d/2} \psi^2$ in fattore $L^{d/2}/L^{d/2} = 1$ analogamente
 ψ^4 porta in fattore $L^{d/2}/L^{d/2} L^{d/2}/L^{d/2} = L^{-d}$

$$e^{-H_L(\hat{\psi}) - F_L^0} = \prod_{\frac{q_m}{L} < q < q_m} \int d\hat{\psi}_q e^{-H(\hat{\psi})} \rightarrow \psi_q \rightarrow L^{-1/2} \hat{\psi}_{Lq}$$

come prima e alle considerazioni precedenti si è identificato
 $x_p = \frac{d+n}{2} - 1$

si ha che

$$\hat{\psi}_i = \hat{\psi}'_i + \hat{\psi}_i \text{ dove } \hat{\psi}'_i \text{ sono i componenti summates}$$

$$\hat{\psi} = \prod_{\frac{q_m}{L} < q < q_m} \prod_i \hat{\psi}_{iq}$$

il differenziale è funzione per ogni funzione è un
 vettore infinito nello spazio di Fourier così che:

$\forall \psi$ ψ è indistinto dal vettore $(\psi_0; \psi_1; \dots; \psi_q; \dots)$

dunque una variazione su ψ è una variazione negli
 variabili artioniche

$$\delta \psi = \prod_q d\psi_q \text{ sotto } q \rightarrow q$$

si nota subito che SE $u=0$ ogni modo $\hat{\psi}_q$ è una coppia

questo non significa che il campo $\psi(x)$ è composto da
variabili disaccoppiate statistiche

Ogni modo R è distribuito secondo la

$$P_R \approx \exp - (t_0 + c R^2) |\psi_R|^2 \quad R \neq 0$$

PUNTI FIX PER $u=0$ $h=0$

Consideriamo punti fix sulla superficie $u=0$ nello
 spazio parametrico

$e^{-H(\psi)}$ si calcola con $\psi_q \rightarrow L^{-1/2} \psi_{Lq}$ con questo

$$H \rightarrow H'(\hat{\psi}) = \frac{1}{2} \sum_{q < q_m} (t_0 + c q^2) L^{-1/2} |\psi_{Lq}|^2 - \sum_i h_i L^{-1/2} \psi_{0,i}$$

però la $\sum_{q < q_m}$ è costante quando $q \rightarrow L$ da $\sum_{q < \frac{q_m}{L}}$

$$e^{-H_L} e^{-F_L^0} = \int \prod_{q < q_M} d\varphi_q \exp - \frac{1}{2} [\sum_{q < q_M} (L^{2-\eta} t_0 + L^\eta e q^2) |\varphi_q|^2]$$

$e^{-F_L^0}$ è la normalizzazione che intendiamo con $q' = Lq$

$$e^{-H_L F_L^0} = \int \prod_{q_M < q < Lq_M} d\varphi_{q/L} \exp - \frac{1}{2} [\sum_{q_M < q < Lq_M} (L^{2-\eta} t_0 + L^\eta c q^2) |\varphi_q|^2]$$

Il fatto che come all'esponente con $q' < q_M$ escono fuori dall'integrale che si spezza nel prodotto di 2 fattori:

$$\left(\prod_{q < q_M} \exp - \frac{1}{2} \sum_{q < q_M} [L^{2-\eta} t_0 + L^\eta c q^2] |\varphi_q|^2 \right) \cdot \left(\int \delta\varphi \exp - \frac{1}{2} [\dots] \right)$$

DANNO LA DUALITÀ

DANNO LA COSTANTE Moltiplicativa

La costante F_L^0 viene così ad essere l'energia libera DATA AI MODI ALTI $q_M < q < q_M$

$$F_L^0 = - \frac{1}{2} \sum_{q_M < q < q_M} m \ln \frac{2\pi}{t_0 + c q^2}$$

è l'hamiltoniana ma si suola così essere

$$\begin{aligned} H_L(\hat{\psi}) &= \frac{1}{2} \sum_{q < q_M} L^{2-\eta} (t_0 + c q^2) |\varphi_q|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q_M < q < Lq_M} (L^{2-\eta} t_0 + L^\eta c q^2) |\varphi_q|^2 \end{aligned}$$

ma

$$H_L(\hat{\psi}) = H_L(\hat{\psi}; \mu)$$

e nel modo più facile si trasforma con se si

$$\boxed{t'_0 = L^{2-\eta} t_0 \quad c' = L^\eta c \quad u' = u = 0} \quad \text{TRASFORMAZIONE DEI PARAMETRI}$$

Il fatto che $u=0$ (cioè si è già sulla sep dove u è invariante), tiene il segno di temperatura cioè si vede più estesamente in seguito.

Come si vede la trasformazione è quella di un gruppo

Si hanno 2 tipi di punti fissi

A) $\eta=0$ e $t_0=0$ per $\forall$ e (FIX POINT)

B) $\eta=2$; $t_0^* = t_0$; $c^* = 0$ e per questo si hanno 2 punti fissi a seconda che $t > 0$ oppure che $t < 0$ (FIX POINT BIANCO) -

FIX POINT (A)

È il punto caratterizzato da $\mu_0^* = (0; 0; c)$ $\forall c$ mezzo:

$$P_0^*(\hat{\psi}) = \exp - \frac{c}{2} \int d^d x (\nabla \hat{\psi}(x))^2 = \prod_q \exp - \frac{c}{2} q^2 |\varphi_q|^2$$

$$H_0^*(\hat{\psi}) = \frac{c}{2} \int d^d x (\nabla \hat{\psi}(x))^2$$

dalla $P_0^* = \lim_{L \rightarrow \infty} P_L$ si vede perché questo è detto GINX e l'interpolato $L \rightarrow \infty$ ne fa un blocco e l'altro è dato dal GRADIENTE attraverso la COST DI ACCOPI

L'hamiltoniana H^* è FINITA se si hanno condizioni al contorno che sull'endone sono delle condizioni.

LE VAR DI BLOCCO $\varphi(x)$ SONO FORTEMENTE DIPENDENTI PERCHÉ LA FUNZIONE DIVERGE ESSO NON SONO DI TIPO GINX e così si vede

$$\text{per } \eta=0 \quad x\varphi = \frac{d+\eta}{2} - 1 = d/2 - 1$$

$$\langle \varphi^2 \rangle \sim N^{2 - \frac{2}{d} x\varphi} = N^{1 + \frac{2}{d}} \quad \text{con } 1 + \frac{2}{d} > 1$$

non vale il teorema del punto centrale.

Questo punto fisso descrive correttamente il problema di un vero sistema critico a dimensionalità $d > 4$

PUNTI FIX BANALI (B)

sono dati dai parametri $\mu_\infty = (t_0; 0; 0)$ dove μ_∞ si distingue

I) $t_0 > 0$ II) $t_0 < 0$ entrambi con $\eta = 2$

I)
$$H_+^* = \frac{t_0}{2} \int d^d x \hat{\psi}^2$$

$$P_+^* = \exp - \frac{t_0}{2} \int d^d x \hat{\psi}^2 = \prod_x \exp - \frac{t_0}{2} b^d \hat{\psi}^2(x)$$

dove in maniera impropria

$$P \cong \exp - \sum_x \psi(x) = \prod_x \exp - \psi(x)$$

b^d sono le dimensioni, dove ~~non sono~~ b^d sono le dimensioni, dove ~~non sono~~

Questo è perché le variabili di Bloch $\{\hat{\psi}(x)\}$ sono un campo stocastico di variabili indipendenti e GAUX dunque la proba è prodotto di prob

II) Se $t_0 < 0$ è necessario un piccolo contributo di 4° ordine per normalizzare la distr che altrimenti esploderebbe

$$\mu_\infty^+ = (t_0, 0^+, 0) \text{ corrispond}$$

$$P_\infty^+ = \exp \int d^d x \frac{1}{2} [t_0 \hat{\psi}^2 - u \hat{\psi}^4]$$

per $u \rightarrow 0^+$

essendo > 0 (ma piccolo) contribuisce con la dominanza di ψ^4 e rende possibile l'integrale
è positivo dove dovrebbe ma cost type $\exp \int dx x^2 > 0$ che diverge

Anche in questo caso le variabili sono indip. stat.

In entrambi i casi $x\psi = d/2$ le variabili sono normali (vale il teorema del limite centrale) ed inoltre sono indipendenti statisticamente ovvero

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_\infty} \langle \psi_i(x; \mu) \psi_j(y; \mu) \rangle = \delta_{ij} \delta(x-y)$$

I) Questo è il caso di ALE temperature $t_0 > 0$ $T > T_c$ dove $T = \infty$

II) È il caso opposto $T < T_c$ cioè $T = 0$

IDEALIZZAZIONE DI RG A FORTI PUNTI FIX GAUX E SUA STABILITÀ

Il caso $u \neq 0$ è da pp. da trattare ma è più simplex se si considera il problema linearizzato. Dal caso linearizzato si hanno in forma di serie sul tipo di punto fisso: attrattori, fuochi instabili, selle etc.

Supponiamo in generale

$$H = H_1 + H_0 \text{ con } \|H_1\| \ll \|H_0\|$$

$$H' = RG(H) = H'_0 + H'_1 + H'_2$$

dove H'_2 è un termine di 2° ordine introdotto dalla trasformazione RG su H_1 .

È da notare che RG agisce linearmente su $H_0 + H_1$ ed è non lineare in H_2 (mon)

ricordando che

$$\prod_{i=1}^n \int d\psi_i = \delta\psi$$

$$e^{-H_1} e^{-F_1^0} = \int \delta\psi e^{-H(\psi)} \Big|_{\psi \rightarrow L^{-1/2} \psi} \text{ con } H_1 = H'_1 = RG(H)$$

omettiamo per simplex la condizione che notiamo allora

$$e^{-F_1^0} e^{-(H'_0 + H'_1 + H'_2)} = e^{-F_1^0} e^{-H_0} \left[\sum_R \frac{(H'_1)^R}{R!} (1)^R \right] \left[\sum_m \frac{(H'_2)^m}{m!} \right]$$

dove si è sviluppato l'espon. ritenendo solo i termini di 2° ordine

$$e^{-F_1^0} e^{-H_1} \cong e^{-F_1^0} e^{-H_0} \left[1 - H'_1 + \frac{(H'_1)^2}{2} - H'_2 \right]$$

l'altro membro risulta essere:
$$\int \delta\phi e^{-H(\phi)} = \int \delta\phi e^{-H_0(\phi)} \left(\sum_n (-1)^n \frac{H_1^n}{n!} \right) \approx$$
$$\approx \int \delta\phi e^{-H_0(\phi)} \left[1 - H_1 + \frac{H_1^2}{2} \right] \quad \text{approssimando per ordini:}$$

$e^{-F_0} e^{-H_0} = \int \delta\phi e^{-H_0}$ o) da cui la normalizzazione
 $e^{-F_0} e^{-H_0} H_1 = \int \delta\phi H_1 e^{-H_0} \quad (1)$

sostituendo questo trovato all'ordine zero:

$$H_1' = \frac{\int \delta\phi H_1 e^{-H_0}}{\int \delta\phi e^{-H_0}} = \langle H_1 \rangle_0$$

MEDELA SUL SISTEMA
DEFINITA DA H_0

$$e^{-F_0} e^{-H_0} \left[\frac{(H_1')^2}{2} - H_2' \right] = \int \delta\phi \frac{H_1^2}{2} e^{-H_0} \quad (2)$$

$$H_2' = \frac{1}{2} (\langle H_1 \rangle_0)^2 - \frac{1}{\int \delta\phi e^{-H_0}} \int \delta\phi \frac{1}{2} H_1^2 e^{-H_0}$$

$$H_2' = -\frac{1}{2} (\langle H_1^2 \rangle_0 - \langle H_1 \rangle_0^2)$$

il successo nel calcolo di H_1' con questi sono dati ci vuole
perche ci vuole tutto il formalismo di perturbazione

lo si può dire di una funzione trasformata secondo la
potenza di tutti i momenti della H_1 (perturbazione)
(secondo la distribuzione H_1 in H_0).

Sia nel nostro caso

$$H_0 = H^* = \frac{c}{2} \int d^d x (\nabla \phi)^2 \quad \text{con } \mu^2$$

possiamo scrivere l'azione di London

$$H = \frac{1}{2} \int d^d x \left[t_0 \phi^2 + \frac{u}{4 \cdot 3} \phi^4 + e (\nabla \phi)^2 \right] = H^* + \Delta H$$

con
$$\Delta H = \frac{1}{2} \int d^d x \left[t_0 \phi^2 + \frac{u}{4 \cdot 3} \phi^4 \right] \quad \text{che prende il posto di } H_1$$

allora il 1° ordine della perturbazione trasformato è

$$\rightarrow \langle \Delta H \rangle_{H^*} = \frac{1}{2} \int d^d x \left[t_0 \langle \phi^2 \rangle_{H^*} + \frac{u}{4 \cdot 3} \langle \phi^4 \rangle_{H^*} \right]$$

la media su H^* è fatta secondo la variabile ϕ come zero
definita come:

$$\phi_i = \phi_i' + \phi_i'' \quad \phi_i' = L^{-d/2} \sum_{q < q_{H/L}} \phi_q e^{i q x_i}$$
$$\phi_i'' = L^{-d/2} \sum_{\substack{q > q_{H/L} \\ q < q_{H/L}}} \phi_q e^{i q x_i}$$

cioè le ϕ_i sono formate dai rettori d'onda inferiori
ADUNA CENA DI AZO L -

Sidovono calcolare le medie eseguite sulle variabili ϕ
per gli operatori euclidiani

$$\hat{\phi}^2 = \sum_i \phi_i^2 \quad \hat{\phi}^2 = \sum_i \phi_i'^2 \quad \text{e} \quad \hat{\phi}^4 = \left(\sum_i \phi_i' \right) \left(\sum_j \phi_j' \right)$$

$$\star \phi^2 = \sum_i (\phi_i' + \phi_i'')^2 = \sum_i \phi_i'^2 + 2 \phi_i' \phi_i'' + \phi_i''^2 =$$
$$= \hat{\phi}^2 + 2 \hat{\phi}' \hat{\phi}'' + \hat{\phi}''^2 \quad \text{ergo}$$

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{H^*} = \hat{\phi}'^2 + 2 \hat{\phi}' \langle \hat{\phi}'' \rangle_{H^*} + \langle \hat{\phi}''^2 \rangle_{H^*}$$

il punto critico la media del parigrado per ϕ
è zero

$$\langle \phi \rangle = 0 \quad \text{dove}$$

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \underbrace{\langle \hat{\phi}'^2 \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{da la variabile che compare in } H_1}} + \langle \hat{\phi}''^2 \rangle + \text{è una costante}$$

$$\begin{aligned} \star\star \langle \hat{\phi}^4 \rangle &= \langle (\phi^2 + 2\phi'\phi + \phi'^2)^2 \rangle = \\ &= \langle \phi^4 + 4\phi'^2\phi^2 + \phi'^4 + 2\phi^2\phi'^2 + 4\phi^3\phi' + 4\phi\phi'^3 \rangle = \\ &= \langle \phi^4 \rangle + 4\langle \phi'^2\phi^2 \rangle + \langle \phi'^4 \rangle + 2\langle \phi^2\phi'^2 \rangle + 4\langle \phi^3\phi' \rangle + 4\langle \phi\phi'^3 \rangle \end{aligned}$$

perché $\langle \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{\phi}^3 \rangle = 0$ momenti dispari del p.d.s. sono nulli al punto critico.

* Calcoliamo la costante $\langle \phi'^2 \rangle$ notando che nel punto fix point le ϕ sono indipendenti (non così NATI ϕ_i) in ogni direzione per $H=H^*$

$$P_0^*(\hat{\phi}) = \prod_q \exp - \frac{c}{2} q^2 |\hat{\phi}_q|^2 \quad \text{ergo}$$

$$\langle \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{-q} \rangle = \delta_{q,0} \langle \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{-q} \rangle \quad \text{VAR. SCORRELATE -}$$

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \sum_i \langle \hat{\phi}_i^2 \rangle = L^{-d} \sum_{\mathbf{q}} \sum_i \langle \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{-q} \rangle$$

perché $\hat{\phi}_{-q} = \hat{\phi}_q^*$ essendo $\phi(x)$ REAL.

$$\langle \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{-q} \rangle = \int d\phi e^{-H^*(\phi)} \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{-q} / \int d\phi e^{-H^*(\phi)}$$

ma $d\phi = \prod_q d\hat{\phi}_q$ e perche

$$e^{-H^*(\phi)} = \prod_q e^{-\frac{c}{2} q^2 |\hat{\phi}_q|^2}$$

$$\langle \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{-q} \rangle = \prod_q \int d\hat{\phi}_q |\hat{\phi}_q|^2 e^{-\frac{c}{2} q^2 |\hat{\phi}_q|^2}$$

l'integrale è gaussiano dalla varianza di $|\hat{\phi}_q|^2$ che è: $\frac{1}{c q^2}$ mentre la $\langle |\hat{\phi}_q|^2 \rangle$ NON DIPENDE e sostituito che $c q^2$ sommato l'integrale

$$\sum_q \rightarrow \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} L^d \quad \text{così che}$$

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \frac{m}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{1}{c q^2} \quad d^d q = d\Omega d|q| \cdot q^{d-1}$$

Ω da angolo solido in d dimensioni:

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \frac{m}{(2\pi)^d} \int d\Omega d|q| \int_{q_{min}}^{q_{max}} dq \frac{q^{d-1}}{c}$$

$$\int d\Omega d|q| = K_d (2\pi)^d \text{ AREA SUPERFICIE SFERA IN DIMENSIONE D}$$

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \left(\frac{m K_d}{c (d-2)} q_{max} (1 - L^{2-d}) \right) \quad K_d = \frac{2}{(2\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \quad \text{FUBINATI COEFF. } \left(\frac{d-1}{2}\right)!$$

m_c dipende da m da d e da c

$\star\star$ Storniamo da calcolo sono $2\phi'^2\langle\phi'^2\rangle$ e $4\langle\phi'^4\rangle$

$$\langle (\hat{\phi}'\hat{\phi}')^2 \rangle = \sum_{ij} \hat{\phi}'_i \hat{\phi}'_j \langle \hat{\phi}'_i \hat{\phi}'_j \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}'_i \hat{\phi}'_j \rangle &= L^{-d} \sum_q \sum_{q'} e^{iqx} e^{iq'x} \langle \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{q'} \rangle = \\ &= \delta_{ij} L^{-d} \sum_q e^{iq(x_i - x_j)} \langle \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{-q} \rangle = \\ &= \delta_{ij} \langle \hat{\phi}'^2 \rangle \quad \text{ergo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\phi}'\hat{\phi}')^2 \rangle &= \sum_i \hat{\phi}'^2_i \langle \hat{\phi}'^2_i \rangle \quad \text{ma } \langle \hat{\phi}'^2_i \rangle \text{ NON DIPENDE} \\ &= \frac{m_c}{n} (1 - L^{2-d}) \hat{\phi}'^2 \end{aligned}$$

$$\langle \hat{\phi}^4 \rangle = (m^2 + 2m) \left(\frac{m_c}{n} \right)^2 (1 - L^{2-d})^2$$

dopo

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}^4 \rangle &= (m^2 + 2m) \left(\frac{m_c}{n} \right)^2 (1 - L^{2-d})^2 + \hat{\phi}'^4 + 4\hat{\phi}'^2 \frac{m_c}{n} (1 - L^{2-d}) + \\ &\quad + 2\phi'^2 m_c (1 - L^{2-d}) \hat{\phi}'^2 \end{aligned}$$

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \phi'^2 + m_c (1 - L^{2-d}) \quad \text{ma } L = (1 - L^{2-d})$$

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{1}{2} \int d^d x \left[\frac{1}{2} (m_c L + \hat{\phi}'^2) + \frac{1}{3 \cdot 4} ((m^2 + 2m) \left(\frac{m_c}{n} \right)^2 L^2 + \right. \\ &\quad \left. + L (4 \frac{m_c}{n} + 2m_c) \hat{\phi}'^2 + \hat{\phi}'^4) \right] \end{aligned}$$

$$H_1' = \langle \Delta H \rangle_* = \frac{1}{2} \int d^d x \left\{ t_0 + u \left(\frac{m}{2} + 1 \right) \frac{m_c}{n} (1-L^{2-d}) \right\} \hat{\psi}^{12} + \frac{1}{3 \cdot 4} u \hat{\psi}^4 + \underbrace{\left(t_0 m_c (1-L^{2-d}) + \frac{u}{3 \cdot 4} (m^2 + 2m) \frac{m_c}{n} (1+L^{2-d}) \right)}_{\text{costante } 4F_L^0}$$

ATTENZIONE! ↴

Per MEDIA VA CALCOLARE DOBENDO

$\varphi_q \rightarrow L \varphi_q$ nello spazio reale cio' equivale se:

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{q \in q_H} e^{iqx} \varphi_q \rightarrow \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{q \in q_H} e^{iqx} \varphi_q =$$

$$\text{se } q' = Lq \\ = L^{1-d/2} \sum_{q' \in q_H} e^{iq' \frac{x}{L}} \varphi_{q'} = L^{1-d/2} \varphi(x') \quad x' = \frac{x}{L}$$

$$\varphi(x) \rightarrow L^{1-d/2} \varphi(x') \quad x' = x/L$$

PIU' IN GENERALE $\varphi(x) \rightarrow L^x \varphi(\frac{x}{L})$ TRASFORMA

che con $\eta=0$ si riduce alla nostra trasformata

$$x\varphi = \frac{d+\eta}{2} - 1$$

$$d x' = L^{-d} d x \quad \text{dove}$$

$$\langle \Delta H \rangle_* = \int d^d x [A \hat{\psi}^{12}(x) + B \hat{\psi}^4(x) + C] = \int_{\varphi \rightarrow L^{-x} \varphi(x')}$$

$$= \int d^d x' L^{+d} [A L^{2-d} \hat{\psi}^2(x') + B L^{4-2d} \hat{\psi}^4(x') + C] =$$

$$= \int d^d x' [L^{2(d-2)} A \hat{\psi}^2(x') + L^{4-2d} B \hat{\psi}^4(x') + L^{+d} C]$$

In questo modo si identifica la trasformazione $\mu \rightarrow \mu'$ perche'

$$\langle \Delta H \rangle_* = H_1' = L_L(H^*) \cdot \Delta H = \frac{1}{2} \int d^d x [t_0' \hat{\psi}^2 + \frac{u'}{3 \cdot 4} \hat{\psi}^4 + c' (\nabla \hat{\psi})^2]$$

Se trasformo $\{\mu\} \rightarrow \{\mu'\}$ sono

$t_0' = L^2 \left[t_0 + u \left(\frac{1}{3} \left(\frac{m}{2} + 1 \right) \frac{m_c}{n} (1-L^{2-d}) \right) \right]$
$u' = L^{4-d} u$
$c' = c$

COEFFICIENTE B

che danno la rappresentazione UNGARS DI RG Nello SPAZIO DEI PARAMETRI

$$L_L = \begin{pmatrix} L^2 & (L^2 - L^{4-d})B & 0 \\ 0 & L^{4-d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RG LINEARIZZATO INTORNO A μ_0

che regola il comportamento di t_0 ; u ; e intorno al punto fix g_{fix} $\mu_0^* = (0; 0; c)$

Per trovare autovalori ed autovettori di L_L basta ridursi al sottospazio di μ definito da t_0 e u .

Gli AUTOVALORI SONO

$$\lambda_t = L^2 \quad \text{e} \quad \lambda_u = L^{4-d}$$

ovviamente in una matrice 2×2 avete solo elem sopra diagonali e' eq

$\det(A - \lambda I) = 0$ da $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = 0 \quad \lambda_1 = a_{11} \quad \lambda_2 = a_{22}$
cio' e' zero per λ mat avente elem sotto o sopra diagonali (e' nullo) -

Gli AUTOVETTORI SONO

$$h_t^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_u^* = \begin{pmatrix} -B \\ 1 \end{pmatrix}$$

GLI INDICI DI SCA SONO QUINDI

$$x_t = \gamma - 2 \quad x_u = 4 - d$$

Consideriamo ora la stabilità del punto fix gauss $\mu^* = (0; 0; e)$ supponiamo esista un doppio campo magnetico UNIFORME IN UNO SPAZIO PARALLELO. SARA D-DIM per di più sempre

$\mu^* = (0; 0; e; 0)$ perche il punto critico è SATURATO $h=0$

Un modo autovalore $\lambda_n = L^{x_n}$ ed un nuovo auto vettore $h_n^* = (0; 0; 0; 1)$ dopo INDICIAZIONE μ^* o vettore ASSISTITO DI PARASTRI μ si scrive

$$\mu = (t_0; u; e; h) \quad t_1 = t_0 + u B^*$$

$$\mu = \mu^* + t_1 h_t^* + u h_u^* + h h_n^*$$

Sotto una trasformazione lineare e DIAGONALIZZATA L

$$\mu' = \mu^* + L^2 t_1 h_t^* + L^{4-d} u h_u^* + L^{x_n} h h_n^*$$

STABILITÀ DEL PUNTO FIX GAUSS

LA CONDIZIONE DI STABILITÀ PER IL PUNTO FIX GAUSS È CHE SIA:

$$\left. \begin{aligned} t_1 = t_0 + u B = 0 \\ h = 0 \end{aligned} \right\} \text{(SUPERFICIE CRITICA)}$$

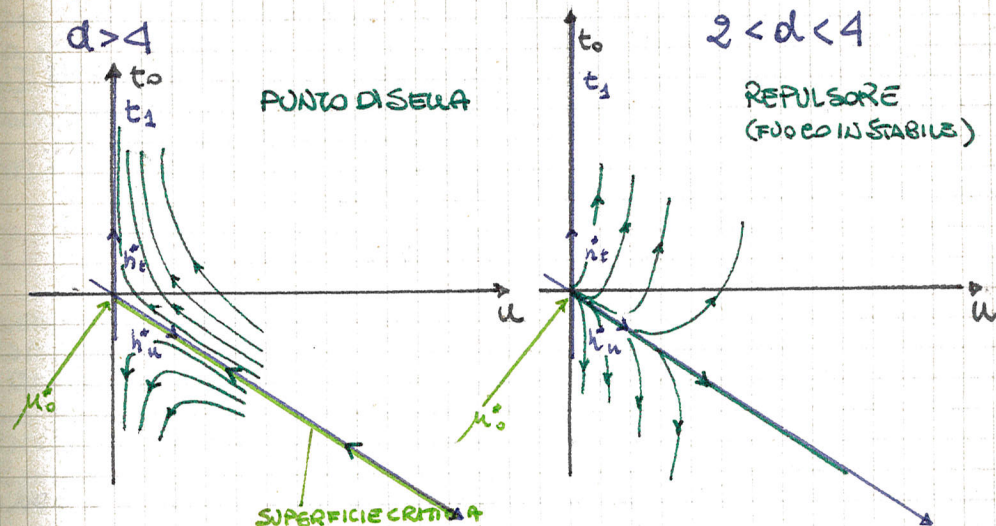
ECCO SIA $d > 4$

Impatti secondari non fanno nel limite $L \rightarrow \infty$ $\| \mu \| \rightarrow \infty$ dato che gli indici del campo t_1 ed h sono RILEVANTI cioè > 0 impatti secondari che se per $L \rightarrow \infty$ dove volere lo scoloring chiaro.

★ Lim $R_L(h) \sim L^{x_n} h \quad x_n = d - x_\varphi = \frac{d}{2} + 1 > 0$
 $L \rightarrow \infty$

* è la trasform. de DIAGONALIZZATA l'operatore L

3. Consideriamo quindi qda $h=0$ e molto spesso $(t_0; u; e)$ individuando una superficie $c = \text{cost}$ su cui si sta se contemporaneamente di R_L nella sua PARTE INFERIORE è che neppure della traiettoria:



Otteniamo l'indice β per dare un esempio dell'uso di RQ consideriamo le magnitudini

$$m(t_1; h; u) \rightarrow L^{-x_\varphi} m(R_L(h)) \text{ secondo una trasform.}$$

dato che $m = \langle \hat{\varphi} \rangle$ è legato all'indice x_φ

$$m(t_1; h; u) = L^{-d/2} m(L^2 t_1; L^{1+d/2} h; L^{4-d} u)$$

perche $x_\varphi = -1 + d/2$ $x_n = 1 + d/2$ $x_t = 2$ con il che dato dalla trasform. t_1 si ha che

$$L \sim |t_1|^{-1/2} \text{ esprimiamo tutto in } t_1 \text{ ponendo } h=0$$

$$m(t_1; 0; u) = t^{(d-2)/4} m_1(\pm 1; 0; u t_1^{(d-1)/2})$$

dato $\beta = (d-2)/4$ gli altri esponenti sono

$$d = 2 - \gamma d = 2 - d/2 \quad ; \quad \gamma = \gamma(2 - \eta) = 1$$

$$\delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta} = \frac{d+2}{d-2}$$

DOVE IL PUNTO FIX GAUSS È CARATTERIZZATO DA GLI INDICI

$$\gamma = 1/2 \text{ e } \eta = 0$$

PUNTO FIX

L'approx gauss sul funzionale di London dove però per gli indici

$\beta = 1/2 \quad \delta = 3$ INDIPENDENTI DA DIMENSIONI

L'approx gauss si basa sul fatto che u è IRRELEVANTE per $u \sim \mu_0^*$ CIO' E' VERO PER $d > 4$ dove E' APPROX GAUSS E' VERA PER $d > 4$ ED E' CONSISTENTE CON RG.

MA COME SI SPIEGA IL FATTO CHE PER

RG	APPROX GAUSS
$\beta = \frac{d-2}{4}$	$\beta = \frac{1}{2}$
$\delta = \frac{d+2}{d-2}$	$\delta = 3$

cioè che gli indici di approx gauss sono quelli ottenuti con RG per $d=4$?

Nel discorso precedente si è visto che:

$m(t_1; 0; u) = |t_1|^{\frac{d-2}{4}} m_2(\pm 1; 0; (u|t_1|^{\frac{d-4}{2}}))$

Un approx gauss per $T < T_c$ allora per $t_1 < 0$ ^{QUI NASCE L'ASINO!} NON SI TRASCURA d nel senso che si ha che

$m \sim \bar{u}^{1/2}$

impatti il minimo di comp medio per $\Phi[4t]$ a campo $h=0$ e aggiunto per $T < T_c$

$m = \bar{\psi} = \sqrt{-\frac{a}{2b}}$ ma nelle nostre ipotesi b è u

ma allora

$m_2(\pm 1; 0; u|t_1|^{\frac{d-4}{2}}) \sim [u|t_1|^{\frac{d-4}{2}}]^{-1/2}$ quindi

$m(t_1; 0; u) \sim |t_1|^{\frac{d-2}{4}} [u|t_1|^{\frac{d-4}{2}}]^{-1/2} \sim \bar{u}^{1/2} |t_1|^{1/2}$

PER U PICCOLO A COSTANTE $m \sim |t_1|^{1/2}$ DUNQUE $\beta = 1/2$

Tutto ciò a cui si vede perché RG NON RISOLVE IL PROBLEMA in questo caso quello di London RG TRAVA LE SOLI PROPRIETÀ DI TRASFORMAZIONE DI QUESTO dove la cosa importante

$m \sim u^{-1/2}$

cioè data dalla risoluzione in approx gauss di London la RG NON PRESTA ATTENZIONE AI PARAMETRI TIPO U IRRELEVANTI PERICOLOSI ESSI NECESSITANO AL MODELLO PER LA SOLIDIFICAZIONE in fatto per London se $u=0$ sempre

$m = \infty$ dove u mantiene m finito.

PUNTO FIX IN $d=4$ E DIMENSIONI -

La maggior parte dei sistemi fisici interessanti sono a 3 o 2 dimensioni; poiché le sostanze o stati molecolari non sono debolmente interagenti solo possono essere riguardati come sistemi bidimensionali.

Per ottenere significativi risultati fisici bisogna risolvere il problema di TROVARE UN PUNTO FIX (NON BANALE) STABILE A $d < 4$ DIMENSIONI -

Il punto fix gauss è $\mu_0^* = (0; 0)$ su $c = \text{cost}$ per $d > 4$ se si studi il comportamento di un sistema a dimensionalità $d = d - \epsilon$ si può pensare che il NUOVO PUNTO FIX STABILE sia VICINO A μ_0^* QUESTO CHE ACCADE PERÒ E' CHE IL PUNTO FIX STABILE E' UN NUOVO PUNTO FIX CIOE' NON SI PASSA CON CONTINUITA' NEL LIMITE

$\lim_{\substack{d \rightarrow 4 \\ \epsilon \rightarrow 0}} \mu^*(d=4-\epsilon) = \mu_0^* \Leftarrow \text{FALSO!!}$

PERCHÉ $\mu_0^* = (0; 0)$ ESISTE ANCHE IN $d < 4$ SOLO CHE E' INSTABILE

Dunque il NUOVO PUNTO FIX VA RICERCATO FRA QUEI PUNTI NON FISICI ESISTENTI A $d > 4$ CHE PER LE LORO CARATTERISTICHE NEL LIMITE $d \rightarrow 4$ ENTRANO NELLA REGIONE FISICA -

La regione non fisica del piano $\mu = (t; u)$ è quella a $u < 0$ ricordiamo che nella Teor di London equivo per ogni ammettono di tipo London u deve essere ≥ 0 perché il coefficiente di grado 2 in Φ assieme il significato di temperatura ($t = T_c$) se così non fosse il punto fix:

$\langle \bar{\psi} \rangle = \sqrt{-\frac{a}{2b}}$ $a \rightarrow t$ $b \rightarrow u$ $\text{sempre immaginario}$

L'IDEA ESSENZIALE DI WILSON E FISCHER E' QUELLA CHE PER $d=4-\epsilon$ CON $\epsilon > 0$ PICCOLO SE ESISTE μ

$$\|\mu^* - \mu_0\| < \delta(\epsilon) \text{ CON } \delta \text{ PICCOLO}$$

MA μ^* NON VIENE DAL PUNTO FIX GAUX PER $d \rightarrow 4$
E COSI' DA UNA GIUSTA CONDIZIONE:

SEGUONO LINEARIZZATA per u sotto una RG a $d > 4$ e

$$RG(u) = u' = L^{4-d} u$$

allora ponendo $e = e^{\epsilon} L$

$$u' = e^{\epsilon} u$$

La velocità di allontanamento di u' da u al variare di e è data così da

$$\frac{du'}{de} = \epsilon u'$$

QUESTO DERIVA DALL'EQ LINEARIZZATA e da PER $\epsilon > 0$ UN'AUTOVALORE INDEFINITO RIFERITO AL PUNTO FIX GAUX
SE IL PUNTO STABILE L'EQ DEVE DARE INVECE UNA u' UGUALE A DUE UNA RAPPRESENTAZIONE DI RG

Bisogna CONSIDERARE TERMINI NON LINEARI al più basso ordine:

$$\frac{du'}{de} = \epsilon u' - g u'^2$$

ADORA SE g NON E' $\mathcal{O}(\epsilon)$ u^* E' $\mathcal{O}(\epsilon)$ infatti il punto fix per l'eq sopra è

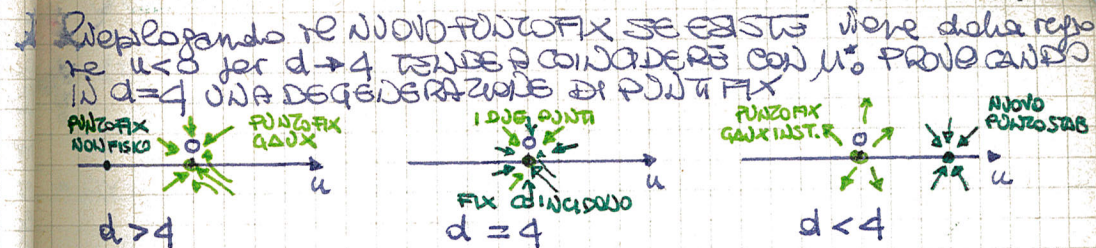
$$\frac{du'}{de} = 0 \quad u^* (\epsilon - g u^* = 0$$

ESSENDO $\epsilon > 0$

$$a) \text{ se } g < 0 \quad u^* = 0$$

$$b) \text{ se } g > 0 \quad u^* = \frac{\epsilon}{g} = \mathcal{O}(\epsilon)$$

IL RG TROVA SOLO SE μ^* L'ESPRESSIONE ESPlicita PER g



Confrontati dall'idea di Wilson facciamo capire due port. prestando più attenzione al fatto che si comporta come un 2° ORDINE oltre alla presenza di avere

$$\mu' = \underbrace{L_L \mu}_{\text{OPERATORE LINEARE}} + \underbrace{C_{LL} \mu^2}_{\text{TERMINI NON LINEARI } g \text{ (GE' UNO' NON LINEARE)}} \quad \text{OBSISTE PUNTO } \mu_0^* = 0$$

dove l'operatore NON LINEARE R_L si è sviluppato come

$$R_L = L_L + \sum_i M_i^{(4)} \quad \text{per } i=1 \quad M_1^{(4)}(\mu) = G_L \mu^2$$

Sequenza per ϕ^2 e ϕ di partenza e la perturbazione

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^d x [t_0 \hat{\phi}^2 + c (\nabla \hat{\phi})^2] \quad H_1 = \frac{1}{2} \int d^d x \frac{u}{4} \hat{\phi}^4$$

(senza prestare eccessiva attenzione ai coefficienti qui scelti divers. da prima)

Si sarebbe potuto scegliere $H_0 = H^*$ e includere $t_0 \hat{\phi}^2$ in H_1 , come prima E' LA STESSA COSA.

La cosa essenziale è TENERE I TERMINI A 2° ORDINE cosa che da secondo formula precedenti:

$$H' + F_0' = H_0' + (H_1' + H_2') + \text{cost}$$

Infatti l'applicazione di RG su $P(\hat{\phi})$ porta a

$$e^{-H_L} e^{-F_L} = e^{-F_L} e^{-(H_0' + H_1' + H_2')} \quad \text{e da questo si esprime per } H_0' \quad H_1' \quad \text{e } H_2'$$

$$H' + F_0' = H_0' + \langle H_1 \rangle_0 - \frac{1}{2} [\langle H_1^2 \rangle_0 - \langle H_1 \rangle_0^2] + \text{cost}$$

dove le medie sono calcolate con la condizione $\hat{\phi}_q \rightarrow L^{-1/2} \hat{\phi}_{Lq}$

Di sopra col colore

I) $\langle H_2 \rangle = \frac{u}{8} \int d^d x \int d\hat{\varphi} e^{-H_0(\hat{\varphi})} \hat{\varphi}^4$ (ovvero scalinata la int. funz. con quella spaziale)

II) $H_2' = -\frac{u^2}{128} \int d^d x d^d y \langle (\hat{\varphi}(x) - \langle \hat{\varphi}(x) \rangle_0) (\hat{\varphi}(y) - \langle \hat{\varphi}(y) \rangle_0) \rangle$

dove $\langle \rangle_0 = \int d\hat{\varphi} e^{-H_0}$

come in op. teor. delle part. che si rispetti le forme di 2° ordine
o una funzione di correlazione (integrata sullo spaziale)
relativa al campo scalare $\hat{\varphi}^4$ in assenza di perturbazioni

È analoga con la EDQ è:

$H_1^{(stat)} = \int d^d x \tilde{J}^{\mu}(x) A_{\mu}(x)$ $H_1^{(stat)} = \frac{u}{8} \int d^d x \hat{\varphi}^4(x)$

$S^{(2)} = i e^2 \int d^d x d^d y (\tilde{J}^{\mu}(x) D_{\mu\nu}(x-y) \tilde{J}^{\nu}(y))$ $D_{\mu\nu} = i \langle T A_{\mu} A_{\nu} \rangle_0$ funzione di correlazione - vuoto

$H_2' = -\frac{u^2}{128} \int d^d x d^d y \langle \Delta \hat{\varphi}(x) \Delta \hat{\varphi}(y) \rangle$ funzione di correlazione - (scalare)

Il calcolo di H_2' va effettuato all'ordine 2 in ϵ ma
per le nostre ipotesi $u^2 \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$ dove è integrato
deve essere cost. in ϵ e la calcolo per $d=4$
e per $t_0=0$

Nel calcolo di H_2' invece essendo $u \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ è integrato dovrà
essere una cost. in $\mathcal{O}(\epsilon)$ -

I) Se è già ottenuto

$\langle \hat{\varphi}^4 \rangle = \langle \hat{\varphi}^4 \rangle + 4 \langle \hat{\varphi}^2 \hat{\varphi}^2 \rangle + 2 \langle \hat{\varphi}^2 \rangle^2 + \langle \hat{\varphi}^4 \rangle$

gli addendi devono essere calcolati con l'ordine di $\mathcal{O}(\epsilon)$
utilizzando un sottoproced.

$\langle \hat{\varphi}^2 \hat{\varphi}^2 \rangle = \langle \hat{\varphi}^2 \rangle^2 / n + m^2 \text{ canon per d.o}$

$\langle \hat{\varphi}^4 \rangle = \langle \hat{\varphi}^4 \rangle + 2 \langle \hat{\varphi}^2 \rangle^2 (1 + \frac{2}{n}) + \langle \hat{\varphi}^4 \rangle$

In precedente $\langle \hat{\varphi}^2 \rangle$ è stato calcolato ponendo in H_0
solo il termine in ϵ qui è che si determina in t_0 per la scelta
fatta per H_0 dove:

$\langle \hat{\varphi}^2 \rangle_0 = \frac{m}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} dq q^{d-1} \frac{1}{t_0 + c q^2}$
Kd Scatola della DIVERGENTE DI H0

È richiesto $d=4-\epsilon$ AAAAAAARGH ← gr. del matematico

$\langle \hat{\varphi}^2 \rangle_0 = m_c (1 - L^{-2+\epsilon}) - m K_4 e^{-2 t_0 \ln L} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

dove si è sviluppato in

$K_4 = 4 - \epsilon = \frac{2}{(2\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)}$

Le forme in $\langle \hat{\varphi}^2 \rangle$ nel calcolo di $\langle \hat{\varphi}^4 \rangle$ si tiene così:

$\langle \hat{\varphi}^4 \rangle = 2 \langle \hat{\varphi}^2 \rangle^2 (1 + \frac{2}{n}) [m_c (1 - L^{-2+\epsilon}) - m K_4 e^{-2 t_0 \ln L} + \mathcal{O}(\epsilon^2)]$

questo è il solo termine in $\langle \hat{\varphi}^2 \rangle$ in H_1 perché $\langle \hat{\varphi}^4 \rangle$ è una costante.
Allora la costante di accop. t_0 nel 1° passo di ϵ non
molto zozzo di tenere stando per

$m_c = \frac{m K_4}{(d-2) c} q_H^{d-2} = \frac{m K_4}{2 e} q_H^2$ $d=4$ in m_c -

$\langle \hat{\varphi}^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \ln Z(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \ln Z(\epsilon)$

$t_0^{(2)} = \frac{u}{\epsilon} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \frac{q_H^2 K_4}{2} (1 - L^2) + u \left[\epsilon - t_0 \left(\frac{u}{\epsilon^2} \right) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) K_4 \ln L \right]$

dove C indipendente da ϵ da t_0 e da u -

Al 1° ordine in ϵ cioè dal calcolo di $\langle H_2 \rangle = H_2'$ si vede
che è rimane NON CAMBIATO ALL'ORDINE 2 e poiché dal compo-
simento proporzionale a $1/\phi^2$ QUESTO SIGNIFICA

$\eta = 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ in fatti attribuendo una dim. scala a ϵ

il termine $\int d^d x |\nabla \hat{\varphi}|^2 c$ ha dimensioni scala

$x_v + 2x_\phi + 2 + x_c = 0$

x_v è la scalatura del volume $\bar{v} = V/L^d$ dove $\bar{v}$ - d ie 2 compare
perché

$|\nabla \hat{\varphi}|^2 \sim q^2 \hat{\varphi}^2$ e $q^2 \rightarrow L^2 q^2$

di cui si ha l'espressione di cui menzionerò

$$x_c + 2x_p + 2 - d = 0$$

oltre con le dimensioni di scala che valgono esattamente per $R_L(f_p(x))$ si è detto che

$$x_p = \frac{d+1}{2} - 1 \quad \text{Sostituendo}$$

$x_c = -1$ dice se $1 = 0$ $x_c = 0$ e viceversa dopo l'unico termine in ϵ che compare in H_1 al 1° ordine in ϵ è quello interurbato da tutto ad H_0 .

Il fatto che come fino ad adesso fatto si sia sempre otti-
bilita la dimensione scale o se sia questo risiede
nell'espansione con $1/L$ la dimensione x_p .

Faendo ora la trasformazione

$$\hat{\psi}(x) \rightarrow L^{1-d/2} \varphi(x') \quad \text{con } x' = x/L \quad dx' = dx/L^d$$

da per terminare in $\hat{\psi}^2$ appropriati al calcolo I) e II) in fatto
di scale

$$H_1 + H_2 = \int dx' [\dots] \hat{\psi}^2 + \text{termini in } \hat{\psi}^4 \text{ e in } \nabla \hat{\psi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dx' L^d L^{2(1-d/2)} \varphi^2(x') [\dots] + \text{altro} =$$

$$= \int dx' L^2 [\dots] \varphi^2(x') + \text{altro}$$

quello che è tutto in $[\dots]$ rappresenta la cost. t'_0 in cui che

$$t'_0 = L^2 (t_0 + t_0^{(1)} + u^2(D))$$

viene da H_1
viene dal calcolo precedente

II) Come abbiamo già fatto notare e viene in H_2 porta
nell'integrale solo due costanti in ϵ e si curano in modo
dovuto da u .

Per fare II) bisogna avere un' analogia con $\epsilon = DQ$
di cui si sviluppano gli integrali nei termini delle f.d. correla-
zione

ANALOGIA CON LA EDQUANTISTICA

$$u \int dx^d \langle \hat{\psi}^4 \rangle = \langle H_1 \rangle = H_1 = \int dx^d dy^d \langle \hat{\psi}^2(x) \hat{u}(x-y) \hat{\psi}^2(y) \rangle$$

Calcoliamo $\langle \hat{\psi}^4 \rangle$ in termini di $\langle \hat{\psi}^2 \rangle$ $i = 1 \dots n$ e modo
 $\langle \hat{\psi}^2 \rangle$ si può fare per:

ESSENDO LA $\langle \hat{\psi}^2 \rangle$ MEDIA SU PROCESSO STOCASTICO DISTRIBUITO
GAUSS VALE IL TEOREMA DI WICK

$$\langle \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \dots \psi_n \rangle = \sum_{\text{SOMMA DI PERMUTAZIONI}} \underbrace{\langle \psi_i \psi_j \rangle \langle \psi_k \psi_l \rangle \dots \langle \psi_p \psi_q \rangle \dots \langle \psi_r \psi_s \rangle}_{\text{TUTTI I POSSIBILI COEFFICIENTI}}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi^4 \rangle &= \int dx^d \delta(x-y) \langle \psi^2(x) \psi^2(y) \rangle = \\ &= \int dx^d \delta(x-y) Z_{ij} \langle \psi_i(x) \psi_j(y) \psi_i(x) \psi_j(y) \rangle = \text{col teorema di Wick} \\ &= \int dx^d \delta(x-y) [Z_{ij} G_{ij}^2(x-y) + G_{ij}^2(x-y) + G_{ii}(0) G_{jj}(0)] = \end{aligned}$$

Si definiscono le funzioni di correlazione
 $G_{ij}(x-y) = \langle \psi_i(x) \psi_j(y) \rangle = \delta_{ij} G(|x-y|)$
perché diverse componenti del par. d'o sono correlate.

$$\begin{aligned} &= \int dx^d \delta(x-y) [2m G^2(x-y) + m^2 G^2(0)] \\ \int dx^d \langle \hat{\psi}^4 \rangle &= \langle H_1 \rangle = \int dx^d dy^d [2m G^2(x-y) + m^2 G^2(0)] \delta(x-y) \\ \langle \hat{\psi}^2(x) \hat{u}(x-y) \hat{\psi}^2(y) \rangle &= 2m \delta(x-y) G^2(x-y) + m^2 G^2(0) \delta(x-y) \end{aligned}$$

↑ AUTOCORRELAZ.

l'operatore $\hat{u}(x-y)$ è $u \delta(x-y)$ dove

GRAFICI DI 1° ORDINE SONO:

(1)

(2)

così che:

$$\langle H_1 \rangle = 2m (1) + m^2 (2) \quad \text{con la convenzione}$$

$$\int dx dy G(x-y) \quad x \text{ --- } y = u \delta(x-y)$$

GRAFICI IN MECC. STAT.

(COME IN EDQ E I SONO 2 PROPAGATORI (2 qu. e bosoni))

La rinormalizzazione richiede il calcolo dei cost di accoppiamento con u e $\bar{u}$ rinormalizzati calcolando: PROPAGATORI ESTERNI -

Risultato per ϕ

$$II) H_2 = -\frac{u^2}{128} \int d^4x d^4y \langle (\psi^4(x) - \langle \psi^4(x) \rangle) (\psi^4(y) - \langle \psi^4(y) \rangle) \rangle$$

La media calcolata si fa su ψ ed $\bar{\psi}$ e si effettua il controcambio

$$\psi(x) \rightarrow L^{3/2} \psi(x) \quad x' = x/L$$

$$\begin{aligned} \langle \psi^4 - \langle \psi^4 \rangle \rangle &= \langle (\psi + \bar{\psi})^4 - \langle \psi^4 \rangle - 4 \langle \psi^3 \bar{\psi} \rangle + 2 \langle \psi^2 \bar{\psi}^2 \rangle - \psi^4 \rangle = \\ &= \langle \psi^4 + 4 \langle \psi \bar{\psi} \rangle \psi^3 + 4 \psi^2 \bar{\psi} + 2 \psi \bar{\psi}^2 + 4 \psi \bar{\psi}^3 - \\ &\quad - \langle \psi^4 \rangle - 4 \langle \psi \bar{\psi} \rangle \langle \psi^3 \rangle - 2 \langle \psi^2 \bar{\psi}^2 \rangle - \psi^4 \rangle = \\ &= 2 \langle \psi^2 - \langle \psi^2 \rangle \rangle 2 \psi^2 + [\langle \psi \bar{\psi} \rangle^2 - \langle \psi \bar{\psi} \rangle^2] 4 + (\psi^4 - \langle \psi^4 \rangle) + \\ &\quad + 4 \psi \bar{\psi} (\psi^2 + \bar{\psi}^2) \rangle \quad \text{ergo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (\psi^4 - \langle \psi^4 \rangle) (\psi^4 - \langle \psi^4 \rangle) \rangle &= \\ &= 16 \langle \psi^2(x) \bar{\psi}^2(y) \rangle \langle \psi^2(x) - \langle \psi^2(x) \rangle \rangle \langle \bar{\psi}^2(y) - \langle \bar{\psi}^2(y) \rangle \rangle + \\ &\quad + 16 \langle [\psi^2(x) - \langle \psi^2(x) \rangle] [\bar{\psi}^2(y) - \langle \bar{\psi}^2(y) \rangle] \rangle + \\ &\quad + \langle (\psi^4(x) - \langle \psi^4(x) \rangle) (\psi^4(y) - \langle \psi^4(y) \rangle) \rangle + \\ &\quad + 16 \langle (\psi \bar{\psi} (\psi^2 + \bar{\psi}^2) - \langle \psi \bar{\psi} (\psi^2 + \bar{\psi}^2) \rangle) (\psi \bar{\psi} (\psi^2 + \bar{\psi}^2) - \langle \psi \bar{\psi} (\psi^2 + \bar{\psi}^2) \rangle) \rangle \\ &\quad + \text{termini misti} \end{aligned}$$

Alla fine viene senza stare a fare tutti i conti

$$H_2 = -\frac{u^2}{128} \int d^4x d^4y [\psi^4(x) - \langle \psi^4(x) \rangle] [\psi^4(y) - \langle \psi^4(y) \rangle] + a)$$

$$+ 16 \psi^2(x) (n+2)^2 \Delta^2(x-y) \Delta(0) + b)$$

$$+ 32 \psi(x) \cdot \psi(y) (n+2) \Delta^3(x-y) + c)$$

$$+ 8 \psi^2(x) \psi^2(y) (n+4) \Delta^2(x-y) + d)$$

$$+ 32 (\psi(x) \cdot \psi(y))^2 \Delta^2(x-y) + e)$$

$$+ 64 \psi^2(x) \psi(x) \cdot \psi(y) (n+2) \Delta(x-y) \Delta(0) + f)$$

$$+ 32 \psi^2(x) (\psi(x) \cdot \psi(y)) \psi^2(y) \Delta(x-y) + g)$$

dove $\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \delta_y \Delta(x-y)$ e da cui

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(x) \rangle = n \Delta(0)$$

Per questa ϕ si come si traslo con Fourier si ha:

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \frac{1}{L^d} \langle \sum_q \sum_{q'} e^{iqx} e^{-iq'y} \psi(q) \bar{\psi}(q') \rangle =$$

dove q e q' sono limitati da q e da q' da $q \leq \pi/L$

$$\text{ma } \langle \psi(q) \bar{\psi}(q') \rangle = \delta_{q-q'} \langle |\psi(q)|^2 \rangle$$

e da quanto detto circa il punto δx δy

$$\langle |\psi(q)|^2 \rangle = \frac{1}{c q^2} \quad \text{ergo}$$

$$\Delta(x-y) = \sum_{\substack{q \\ 0 < q < q_m}} e^{iqx} \frac{1}{L^d c q^2}$$

essendo che l'integrale è calcolato in $d=4$ e m (se ne è discusso) si ha che la traslo Δ di m da m da Fourier da $1/cq^2$ è comb. di FUNZIONI DI BESSEL (AARGH) -

$$\Delta(r) = \frac{J_0(\frac{r}{La}) - J_0(\frac{r}{a})}{(2\pi)^2 c r^2}$$

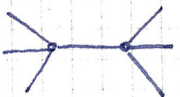
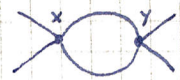
PARTICOLARITÀ DIPENDENTE DALLA TRASLO DI BLOKHO

PARTICOLARITÀ CHE TENDE AD ANNULLARE SI PER $r \rightarrow \infty$

Come si sa dalla teoria dei campi (vedi metodo) per traslo ed una traslo da Fourier di questo tipo

$$f_L(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikr} \Delta(k) \hat{f}(k) dk \quad \text{dove } \Delta(k) \text{ è una funzione costante stica per blocco di dimensioni } L$$

* UNITÀ DI UNITÀ q_m/L e q_m



$\hat{q}(r)$ contiene componenti di Fourier solo per $q > \frac{q_H}{L} = \frac{1}{La}$
 dunque ci si aspetta che

~~non~~ $\hat{q}(r) \rightarrow 0$ velocemente per $r \gg La$

Cioè che sono deboli le correlazioni fra blocchi a
 denti coordinati diversi (etero correlazioni) in fatti
 $r \gg La$ significa che nelle coordinate blocco r_i ; $r_i \gg a$

QUESTO NON AVIENE COSTANTEMENTE cioè si ha una
 LUGA CODASCUANTE PER $r \gg La$ IN $\hat{q}(r)$ IN PARTICO-
 LARE:

$\int d^d r [\hat{q}(r)]^a$ SONO SE a È DISPARI

$\int d^d r [\hat{q}(r)]^a$ AAAA RGH SE a È PARI

Alla luce di ciò andiamo a componenti di II)

a) È una costante INDIPENDENTE da ψ' contribuisce solo
 all'eccezione F_L di cui en libera dovuto al trasfor.

b) È un termine contenente $\psi'(x)$ se si integra su una coord
 relativa r e su x da una assoluta x per cui quest'ulti-
 mo integrale darà una costante -
 Questo termine rappresenta un contributo a t_0 preso
 è moltiplicato per $\psi'(x)$ e dipende dal ψ' .

qualtri) Per capire quel piccolo andiamo a tra-
 versare l'approccio che permette di vedere che
 $\psi(x) \approx \psi(y)$ in fatti è proprio perché in chori-
 teroni comparano $\psi(x)$ e $\psi(y)$ non si ri-
 sa a simmetrie simplex in una forma che
 dia le nuove cost r normalizzate per il fatto
 nelle coordinate.

Ricordando l'espressione di Fourier per $\hat{q}(x) = \frac{1}{La} \sum_{q \in \frac{2\pi}{La}} \hat{q}(q) e^{iqx}$
 questa contiene solo $q < q_H/L$ cioè che

$\|\hat{q}(x) - \hat{q}(y)\| < \delta$ se $\|x - y\| < \epsilon$ con $\epsilon \leq La$

In questo caso essendo $-r = x - y$ dare

$$\hat{q}(y) = \hat{q}(x+r) = \hat{q}(x) + r \cdot \nabla \hat{q}(x) + \frac{1}{2} (r \cdot \nabla)^2 \hat{q}(x) + \mathcal{O}(r^3)$$

(1) (2) (3)

128
 sostituendo in H_2^1 si hanno termini proporzionali a $\psi'(x)$
 che contribuiscono a D termini proporzionali a $\psi'(x)^2$
 che danno un etero proporzionali a $(\psi'(x))^2$ che
 sono 0 in particolare adorne 1) vengono

① c) $\approx 32 (\psi'(x))^2 (m+2)^3 \hat{q}^3(x-y)$

d) $\approx 32 (\psi'(x))^4 \hat{q}^2(x-y)$

e) $\approx 64 (\psi'(x))^4 (m+2) \hat{q}(x-y) \hat{q}(0)$

f) $\approx 8 \psi'(x)^4 (m+4) \hat{q}^2(x-y)$

g) $\approx 32 \psi'(x)^4 \hat{q}(x-y)$

$$H_2^1 = \frac{1}{2} \int d^d x \left[u^2 D \psi'(x)^2 + \frac{\Delta u}{4} \psi'(x)^4 \right]$$

con

$$D = - \int d^d r \left[\left(\frac{m+2}{2} \right)^2 \hat{q}(r)^2 \hat{q}(0) + \left(\frac{m+2}{2} \right) \hat{q}(r)^3 \right]$$

$$\Delta u = -u^2 \int d^d r \left(\frac{m}{2} + 4 \right) \hat{q}^2(r)$$

f) e g) NON CONTRIBUISCONO A Δu PERCHÉ $\int d^d r \hat{q}(r) = 0$
 infatti:

$$\int d^d r \hat{q}(r) = \int d^d r \sum_{q \in \frac{2\pi}{La}} \frac{1}{L^d q^2} e^{iqr} =$$

$$= \sum_{q \in \frac{2\pi}{La}} \frac{1}{L^d q^2} \int d^d r e^{iqr} = \sum_{q \in \frac{2\pi}{La}} \frac{1}{L^d q^2} \delta(q) = 0 \text{ perché } q < q_H \text{ e } q \neq 0$$

Il calcolo di Δu si esegue per $d=4$ perché è un termine già
 di ordine u^2 dove si vuole ϵ^2 :

$$\int d^d r \hat{q}(r)^2 = \frac{1}{(q_H)^4 \epsilon^2} \int d^d r_1 \int d^d r_2 \frac{(\mathcal{I}_0(\frac{r_1}{La}) - \mathcal{I}_0(\frac{r_2}{La}))^2}{r^4} r^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{8\pi^2} \right) \int_0^\infty \frac{dr}{r} \left[\mathcal{I}_0\left(\frac{r}{La}\right) - \mathcal{I}_0\left(\frac{r}{a}\right) \right]^2$$

↑
 K_4

facendo l'integrale
 quest'ordine è 0

$$\Delta u = -u^2 \left(\frac{n}{2} + 4 \right) \frac{K_4}{c^2} \ln L$$

Intanto considerando l'approx zeroth order $\psi(y)$ a 0
 $H_1 + H_2 = \int d^d x t_0^d \psi(x^2) + \left[\int d^d x \left[\frac{u}{8} + \frac{\Delta u}{8} \right] \psi(x^2) \right]_{\psi(x) \rightarrow L^{-d/2} \psi(x)}$
 eseguendo la trasf. $\psi(x) \rightarrow L^{-d/2} \psi(x)$ $x' = x/L$ si ha

$$u' = L^\varepsilon (u + \Delta u) = L^\varepsilon \left(u - \frac{u^2}{2c^2} (n+8) K_4 \ln L \right)$$

Nell'approx da CONSIDERARE IL SOLO TERMINE ① NEW APPROX
DI GRADIENTE u NON DIPENDE ALTRO CHE DA u

Si può dimostrare come questo dà RISULTATI SATISFACENTI
 INDICATI A pag. 10 (C.E.) -

Detto quest'approx il punto FIX NUOVO:

l'eq di p. fix è se $u = u^* \Rightarrow u' = u$ dove

$$L^\varepsilon \left(u - \frac{u^2}{2c^2} (n+8) K_4 \ln L \right) = u$$

essendo $L^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln L}$ PER ε PICCOLO ED L NON ELEVATISSIMO.

$L^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \ln L$ dove

$$u - \frac{u^2}{2c^2} (n+8) K_4 \ln L + u \varepsilon \ln L - \frac{u^2}{2c^2} (\ln L)^2 \varepsilon (n+8) K_4 = u$$

$$u \left[\varepsilon \ln L - \frac{u}{2c^2} (n+8) K_4 (1 + \varepsilon \ln L) \ln L \right] = 0$$

dove o $u = 0$ PUNTO FIX GAUSS oppure

$$\varepsilon - \frac{u}{2c^2} (n+8) K_4 (1 + \varepsilon \ln L) = 0$$

All'ordine ε si deve trascurare $\varepsilon^2 \ln L$ dove

$$u = \frac{2\varepsilon c^2}{(n+8) K_4}$$

Il punto fix per t_0 è

$$t_0 = t_0' = L^2 \left[\left(t_0 + \frac{u}{c} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \frac{q_n^2}{2} K_4 (1 - L^2) + u \varepsilon \ln L - t_0 \left(\frac{u}{c} \right) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) K_4 \ln L + u^2 D \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right]$$

All'ordine ε si congelano gli ultimi 3 termini

$$t_0^* (1 - L^2) = \frac{u^*}{c} \left(\frac{n+2}{2} \right) \frac{q_n^2}{2} K_4 (L^2 - 1) \text{ con } u^*$$

$$t_0^* = - \left(\frac{n+2}{n+8} \right) \varepsilon \frac{q_n^2 c}{2}$$

Sia ora $\delta t_0 = t_0 - t_0^*$ e $\delta u = u - u^*$ si vuole determinare la
 forma dell'operatore linearizzato L nelle vicinanze di u^*
 delle espressioni per t_0 e per u' si ha:

$$\frac{\partial t_0'}{\partial t_0} = L^2 \left[1 - \frac{u}{c^2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) K_4 \ln L \right]$$

$$\frac{\partial t_0'}{\partial u} = L^2 (1 - L^2) \frac{q_n^2 K_4}{2c} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + c \varepsilon L^2 - \frac{t_0 L^2}{c^2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) K_4 \ln L + 2 L^2 u D$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial u} = L^\varepsilon \left[1 - \frac{u}{c^2} (n+8) K_4 \ln L \right]$$

$$\left(\frac{\delta t_0'}{\delta u_0} \right) = L \left(\frac{\delta t_0}{\delta u_0} \right) \text{ con } L = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_0'}{\partial t_0} \big|_{u^*} & \frac{\partial t_0'}{\partial u} \big|_{u^*} \\ 0 & \frac{\partial u'}{\partial u} \big|_{u^*} \end{pmatrix}$$

$$\text{Sia } B = \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \frac{q_n^2}{2} K_4$$

$$\frac{\partial t_0'}{\partial t_0} \big|_{u^*} = L^2 \left[1 - \left(\frac{n+2}{n+8} \right) \varepsilon \ln L \right]$$

all'ordine ε $1 - \frac{n+2}{n+8} \varepsilon \ln L \approx L^{-\frac{n+2}{n+8} \varepsilon}$

$$\text{dove } X_t = 2 - \frac{n+2}{n+8} \varepsilon = \frac{1}{\gamma}$$

Analogamente gli altri jeni si può dire:

$$L = \begin{pmatrix} L^{x_t} & B(L^{x_t} - L^{x_u}) \\ 0 & L^{x_u} \end{pmatrix}$$

con $x_u = -\epsilon$

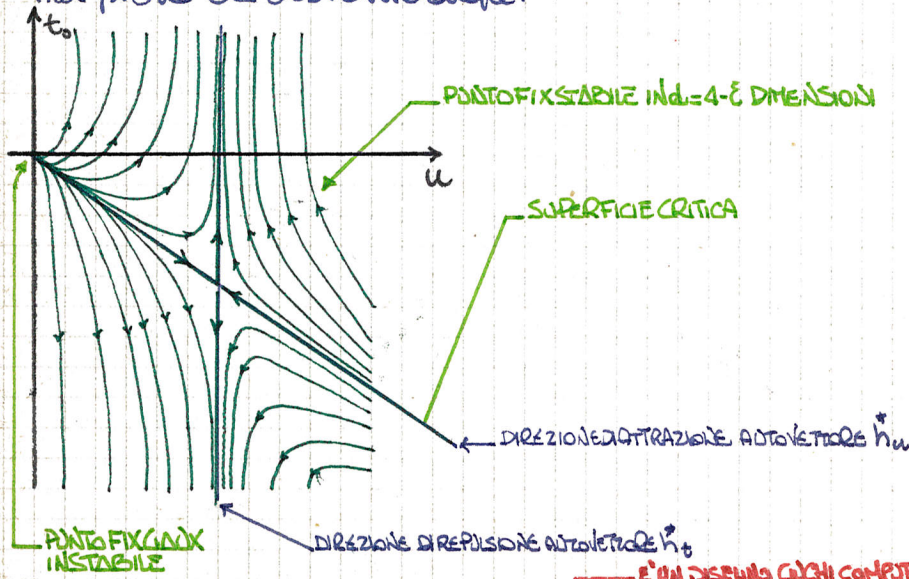
Non si debbo conoscere C e D per sapere x_t ed x_u ma si deve conoscere t_0 e u per conoscere $approx$ l'eq. posto 12 di L e

$$B(L^{x_t} - L^{x_u}) = B(L^2 - 1) + \partial C$$

QUESTO DERIVATO FATTO CHE W NON DIP. DA t_0 -
POSTO

$$t_1 = t_0 + u \left(\frac{m}{2} + 1 \right) \frac{q^2 K_4}{2e} = t_0 + B \frac{u}{c}$$

$t_1 = 0$ RAFFR. (SUPERCRITICA (dimensione di estrazione)
nel primo $e =$ costante dopo:



$x_u = -\epsilon < 0$ SIGNIFICA CHE IL PUNTO FIX E' STABILE

x	β	γ	δ	n	ν
$\frac{2(1-\eta)}{(m+8)}\epsilon$	$\frac{1}{2} \frac{3\epsilon}{2(m+8)}$	$1 + \frac{(m+2)\epsilon}{2(m+8)}$	$3 + \epsilon$	0	$\frac{1}{2} + \frac{(m+2)\epsilon}{4(m+8)}$

CON ATTRAZIONE

Il parametro ϵ e' IMPORTANTE PERCHE' DETERMINA LA MISURA DELLA REGIONE CRITICA - E misura la "velocita" con la quale il punto si muove verso μ^* dopo successive appl. di R infatti se $e = \ln L$

$$\frac{du}{dt} = \epsilon u \Rightarrow |T - T_c| < 10^{-2/\epsilon} \cdot \text{cost}$$

Notare che e $approx$ $L^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon \ln L$ NON VALE per $L \rightarrow \infty$

SI ASSUME CHE DISPONENDO DEI VERI INDICI x_t ed x_u ESPANDEMO IN SERIE DI ϵ ATT. ∂C QUANTO AL L^i SI OTTERREBBE FORTE TIPO 1- $\epsilon \ln L$ -
CIO EQUIVALE AD $approx$ (EXP) . se ϵ e' grosso moltiplo errore su x_t produce un grosso errore su L^i -

FINE...

TUTTO HA UNA FINE

E' UN DISEGNO CHE COMPUTER GRAPHICS