Lezione sm+3 19 marzo

Riassunto delle puntate precedenti:

Formalismo

→ Funzionale della MS

→ Universalità

$E_c \to \infty$

2^a specie

1^a specie

Correlazioni a CORTO RAGGIO

liquido

Gas non è critico ed è all'equilibrio

ξ è finita!

Se $\xi \to \infty$ i dettagli microscopici dell'interazione sono irrilevanti

Modelli semplici permettono la descrizione QUANTITATIVA

una descrizione QUANTITATIVA
del comportamento critico
tramite il calcolo degli
INDICI CRITICI

per esempio

$$\chi \sim \frac{1}{|T-T_c|^{\gamma}}$$

→ Teoria di Campo medio

→ Teoria "classica"
legata all'estremale
della "azione" → Hamiltoniana

$$\mathcal{Z}[m] = \int \mathcal{D}m \, e^{-\beta \varphi[m]}$$

"S"

$$e^{-\beta H[\bar{m}]}$$

→ Fluttuazioni Gaussiane intorno a MFT

divergono per $d<4$

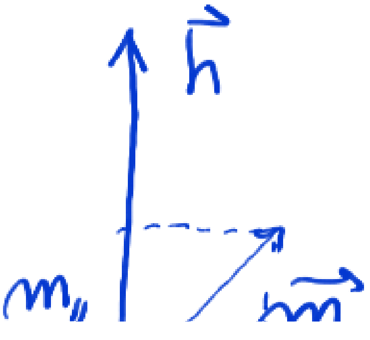
(Parametro d'ordine SCALARE)

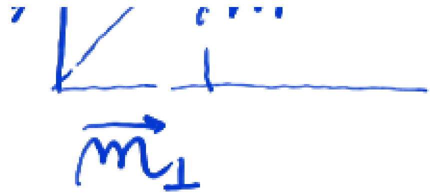
→ Fluttuazioni Gaussiane parametro d'ordine vettoriale

$$\vec{m}(\underline{x})$$

accoppiate con un campo ext

$$\vec{h}(x)$$





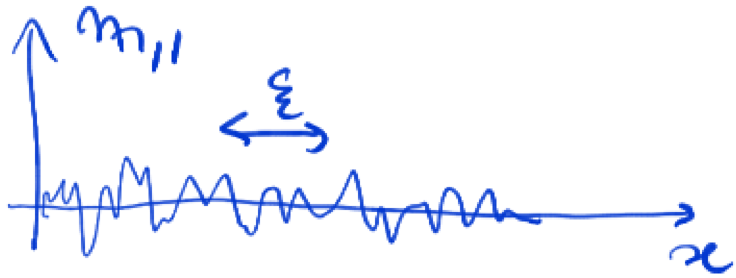
$m_{\parallel}$ si comportano come nel caso scalare

$T > T_c$ $\quad \xi_c$ è finita

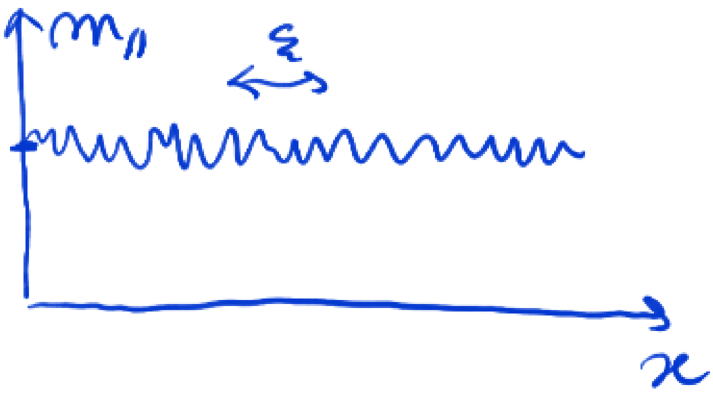
$T = T_c$ $\quad \xi_c \to \infty$ $(h \to 0)$

$T < T_c$ $\quad \xi_c$ è finita

ξ_c è la lunghezza di correlaz. associata alla correlazione delle FLUTTAZIONI



$T > T_c$



$T < T_c$

$m_{\parallel} - \langle m_{\parallel} \rangle = \delta m_{\parallel}$

Per le componenti $\perp$ invece

$$\langle m_\perp \rangle = 0$$

per la $\chi_\perp \propto \langle m_\perp(x)\, m_\perp(0) \rangle$

ξ_c è finito per $T > T_c$

$\xi_c \to \infty$ per $T = T_c$

$\boxed{\xi_c \to \infty \quad \text{per } T < T_c}$

Goldstone modes
(massless)

$$\chi \sim \frac{\chi_0}{1 + \xi_c^2 q^2} =$$

$$= \frac{\chi_0}{\xi_c^2 \left[\xi_c^{-2} + q^2 \right]}$$

$\frac{1}{\xi_c^{-2} + q^2}$ propagatore

$m + q^2$ di un bosone di Klein Gordon

$$\xi^{-2} \to 0 \iff m^2 \to 0$$

quando $d \leq 2 \Rightarrow \langle m_{\parallel} \rangle = 0$

Teorema Mermin e Wagner

$d = 2 \quad n = 2$

componenti del parametro d'ordine

Kosterlitz Thouless

SCALING

parametro d'ordine scalare

parametri intensivi che

determinazione del punto critico

$$\frac{T-T_c}{T_c} = t$$

$t = 0 \Rightarrow$ pto critico

$$\frac{h}{J} = h$$

$h = 0 \Rightarrow$ pto critico

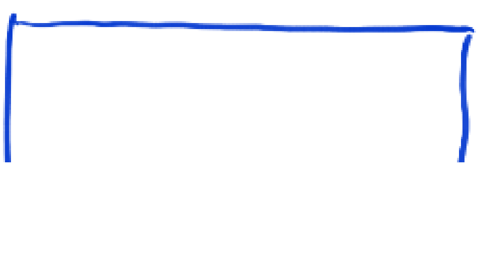
$\xi \to \infty$

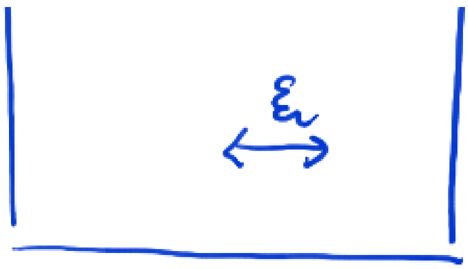
$$A(t,h)$$

$$\Downarrow$$

$$A(L)$$

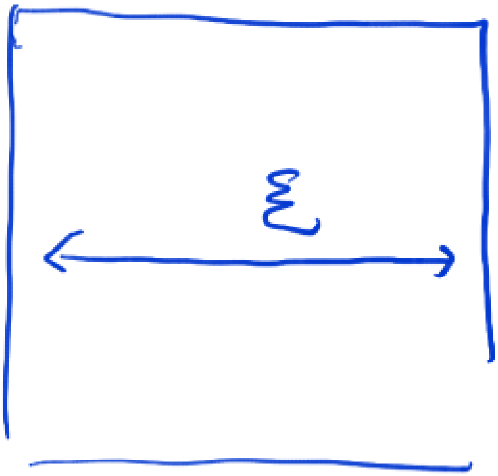
"lunghezza"





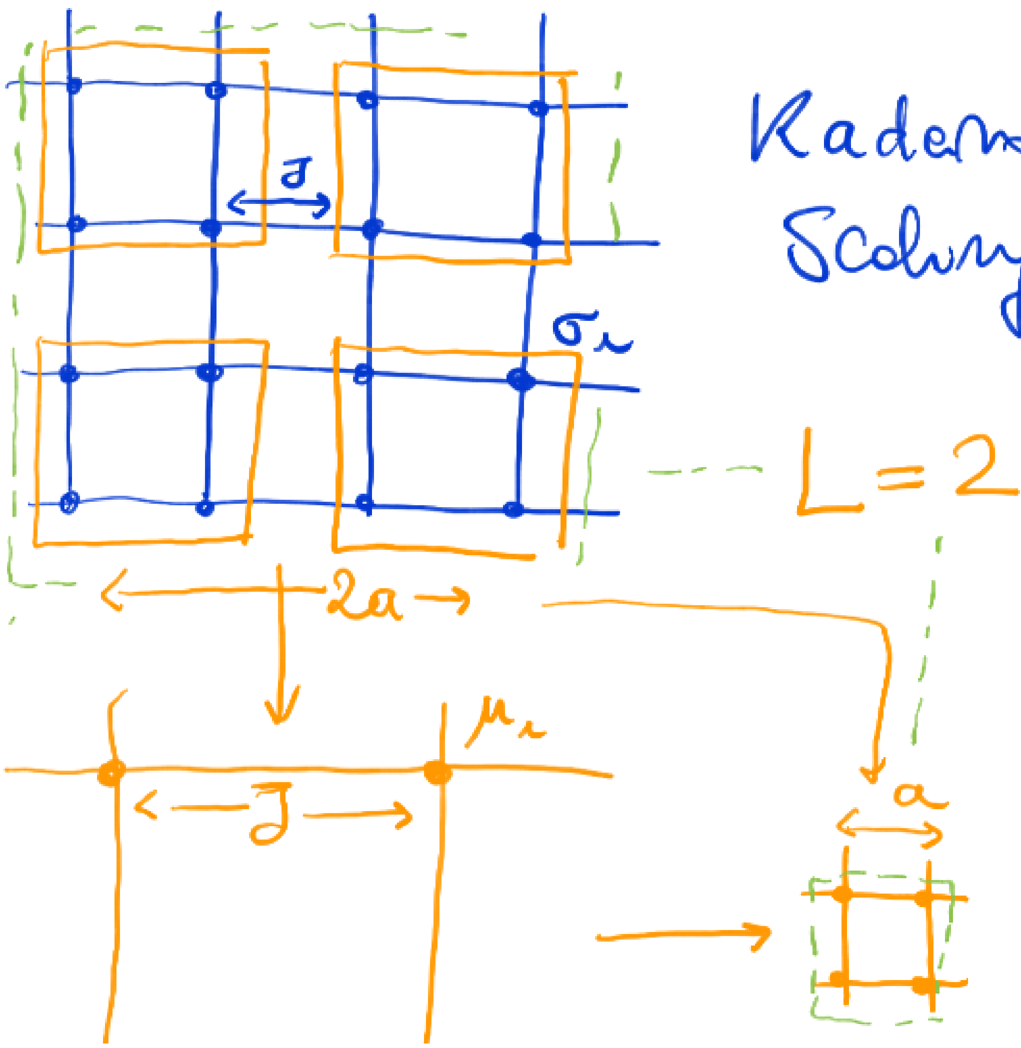
sistema "normale"

$t \to 0 \quad h \to 0$



sistema critico

Kadanoff Scaling



al punto critico le proprietà del sistema "scalato" e quelle del sistema originale sono le medesime ($\xi \to \infty$)

$\boxed{\text{Ipotesi di scaling (Kadanoff)}}$

$$t \longrightarrow \bar{t}$$

$$h \longrightarrow \bar{h}$$

$$Z(h,t) \longrightarrow \bar{Z}(\bar{h},\bar{t})$$

$$\boxed{Z(h,t) = \bar{Z}(\bar{h},\bar{t})}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{\;} V \qquad V = L^d \bar{V}$$

L^{d}

"volume" adimension termine del passo reticolare

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z \simeq -T_c \ln Z$$

$$Z = \bar{Z} \Rightarrow F = \bar{F}$$

per le quantità intensive come

$$f(t,h) = \frac{F(t,h)}{V}$$

$$f(t,h) = -\frac{T_c}{V}\ln Z = -\frac{T_c}{V}\ln \bar{Z}$$

$$\bar{f}(\bar{t},\bar{h}) = \frac{\bar{F}(\bar{t},\bar{h})}{\bar{V}}$$

$$\boxed{f(t,h) = \frac{F(t,h)}{L^{d}\,\bar{V}} = L^{-d}\,\bar{f}(\bar{t}\,\bar{h})}$$

"Scale" dei parametri critici

$\varepsilon = ?$

ricordiamoci di h

$\varepsilon = f(L, t)$ piccolo

supponiamo di poter espandere in serie $f(L,t)$ intorno al pto critico

il sistema "scalato" ha lo stesso punto critico di quello originale

se $t \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$

$$f(L,t) \simeq \cancel{f(L,0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 t + \dots$$

$A(L)$

$$E \cong A(L)\, t$$

A(L) deve essere omogenea di un certo grado per garantire gli andamenti con leggi di potenza intorno al pto critico

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{t} &= L^{x_t}\, t \\ \bar{h} &= L^{x_h}\, h \end{aligned}}$$

Da questo discendono delle relazioni fra gli indici critici che sono verificate sperimentalmente

Ricordiamo che

$m(t=0,h) \propto h^{1/\delta} \quad (\delta = 3)$

$m(t,0) \propto t^{\beta} \quad \overset{MFT}{(\beta = 1/2)}$

leggi di scala per m ?

$$\bar{m}(\bar{t},\bar{h}) = L^{x_m}\, m(t,h)$$

x_m esponente di scala
(scaling exponent)
per m

$$m(t,h) = L^{-x_m}\, \bar{m}\left(L^{x_t} t, L^{x_h} h\right)$$

vera per qualsiasi L

AL PUNTO CRITICO!

esprimo L in funzione di h

$$L^{x_h} h = 1 \rightarrow L = \left(\frac{1}{h}\right)^{1/x_h}$$

$$m(t,h) = h^{x_m} \, m\left(\frac{t}{h^{x_t/x_n}}, 1\right)$$

pongo $t=0$

$$m(0,h) = h^{\frac{x_m}{x_h}} \, \overline{m}(0,1)$$

Const

$$\boxed{\frac{1}{\delta} = \frac{x_m}{x_h}}$$

determino adesso $m(t,0)$

esprimo L in funzione di t

$$L^{x_t}\, t = 1 \qquad L = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/x_t}$$

$$m(t,h) = t^{\frac{x_m}{x_t}} \, \overline{m}\left(1, \frac{h}{t^{x_h/x_t}}\right)$$

pongo $h=0$

$$m(t,0) = t^{\frac{x_m}{x_t}} \, \overline{m}(1,0)$$

Const

$$\frac{x_m}{}$$

$$\boxed{\beta = \frac{\dots}{x_t}}$$ cons.

$$\begin{cases} L = (1/h)^{1/x_h} & h \to 0 \quad L \to \infty \\ L = (1/t)^{1/x_t} & t \to 0 \quad L \to \infty \end{cases}$$

se $x_t, x_h > 0$ sono detti RILEVANTI

funzione di correlazione

$$C(r; t h) = \langle m(r) m(0) \rangle - m^2$$

solo del modulo di r, per grande r !!

$$C \sim m^2$$

$$\bar{C}(\bar{r}; \bar{h} \bar{t}) = L^{2x_m} C(r; h t)$$

$$\bar{r} = \frac{r}{L} \qquad (\bar{V} = V/L^d)$$

$$\boxed{C(r; h t) = L^{-2x_m} \bar{C}\left(\frac{r}{L}; L^{x_t} t \; L^{x_h} h\right)}$$

determino l'andamento della lunghezza di correlazione

esprimo L come funzione di t

$$L^{x_t} t = 1 \qquad L = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/x_t}$$

$$C(r;h,t) = t^{2\frac{x_m}{x_t}} \bar{C}\left(t^{\frac{1}{x_t}} r; 1, \frac{h}{t^{x_h/x_t}}\right)$$

pongo $h=0$

$$C(r;h,t) = t^{2\frac{x_m}{x_t}} \underbrace{\bar{C}\left(\frac{r}{\xi_c}; 1, 0\right)}_{\text{è una funzione}}$$

$$t^{\frac{1}{x_t}} r = \frac{r}{\xi_c}$$

$$\xi_c \sim t^{-1/x_t}$$

$$\boxed{\nu = 1/x_t > 0}$$

ricordando che $\xi_c \sim t^{-\nu}$

trasformata di Fourier della

~~trasformata di Fourier~~

~~funzione di correlazione~~

Ricordiamo

$$C(q;h,t) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}} \quad (\eta \overset{MFT}{=} 0)$$

$$C(q) = \int d^d x \, e^{-i\vec{q}\vec{r}} \, C(\vec{r})$$

$$\bar{r} = \frac{r}{L} \qquad \bar{x}_\alpha = \frac{x_\alpha}{L}$$

$$C(q) = \int d^d\bar{x} \, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{\bar{r}}L} \, C(\vec{\bar{r}}) \, L^d$$

$$\vec{\bar{q}} = L\vec{q} \qquad \vec{q}\cdot\vec{\bar{r}}\,L = \vec{\bar{q}}\cdot\vec{\bar{r}}$$

$$C(q) = L^d \, C(\bar{q})$$

$$C(\bar{q}) = \int d^d\bar{x} \, e^{+i\vec{\bar{q}}\cdot\vec{\bar{r}}} \underbrace{C(\bar{r})}_{L^{-2x_m} C(\frac{r}{L})}$$

$$\boxed{C(q;h,t) = L^{-2x_m+d}\,\bar{C}\left(Lq;\, L^{x_t}t,\, L^{x_h}h\right)}$$

trasf Fourier

esprimo L in funzione di q

$$Lq = 1 \qquad L = 1/q$$

$$C(q;h,t) = q^{2x_m-d}\,\bar{C}\left(1;\, \frac{t}{q^{x_t}},\, \frac{h}{q^{x_h}}\right)$$

pongo $t=0$, $h=0$

$$C(q;0,0) = q^{2x_m-d}\,\bar{C}(1;0,0)$$

Const

$$2-\eta = d-2x_m$$

x_t, x_m incogniti ma ho relazioni fra i diversi indici critici!!

$\nu = 1/x_t \quad \beta = \quad /x_t$

$$\boxed{\eta = 2 - d + 2\beta/\nu} \quad a)$$

Sempre in $C(q)$ esprimo L in funzione di t

$$L^{x_t}\, t = 1$$

$$C(q;t\,h) = t^{2\frac{x_m}{x_t} - \frac{d}{x_t}}\, \bar{C}\left(\frac{q}{t^{1/x_t}}; 1, \frac{h}{t^{x_h/x_t}}\right)$$

posso ottenere la funzione di correlazione (suscettività) termodinamica

$$\chi = \beta\, G \quad (\text{risposta lineare})$$

$$\chi = \beta\, G(q=0)$$

Campo esterno omogeneo (indipendente dalla posizione)

pongo $q = 0$, $h = 0$

$$C(q=0;t,0)=t^{2\frac{x_m}{x_t}-\frac{d}{x_t}}\underbrace{\bar{C}(0;1,0)}_{\text{const}}$$

mi ricordo che

$$\chi \sim C \sim \frac{1}{t^{\gamma}}$$

$$\boxed{\gamma=\nu d-2\beta} \quad b$$

Energia libera specifica

$$f=\frac{1}{V}\ln Z$$

Ip di scaling $Z=\bar{Z}$

$$\boxed{f(t,h)=L^{-d}\bar{f}(L^{x_t}t,\ L^{x_h}h)}$$

calore specifico

$$C_h(t,h=0)\sim t^{-\alpha} \quad (\alpha^{MFT}=0)$$

(Gaux

$\left(\alpha = \frac{d-2}{2}\right)$

derivando f ottengo C_h

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln Z = \frac{\partial}{\partial \beta}\beta F = F + \beta\frac{\partial F}{\partial \beta}$$

$$\beta\frac{\partial}{\partial \beta} = -T\frac{\partial}{\partial T}$$

$$U = F - T\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_h}_{C_h} = \cancel{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_h} - \cancel{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_h} - T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_h$$

intorno alla T_c

$$C_h \simeq -T_c\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_h$$

esprimo L in funzione di t

$$L^{x_t} t = 1 \qquad L = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/x_t}$$

$$f(t, h) = L^{-d}\,\bar{f}\left(L^{x_t}t, L^{x_h}h\right)$$

$$\partial^2 f \quad L^{2x_t-d}\,\partial^2 \bar{f}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = L^{2x_t - d} \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \bar{t}^2}}_{\bar{C}_h}$$

$$C_h(t h) = L^{2x_t - d}\, \bar{C}(L^{x_t} t, L^{x_h} h)$$

per ottenere la dipendenza in temperatura esprimo L in funzione di t

$$L^{x_t} t = 1 \qquad L = \left(1/t\right)^{1/x_t}$$

$$C_h(t h) = t^{\frac{d-2x_t}{x_t}} C_h\left(1, \frac{h}{t^{x_h/x_t}}\right)$$

adesso pongo $h=0$ const

$$\frac{2x_t - d}{x_t} = \alpha \qquad \frac{1}{x_t} = \nu$$

$$\boxed{\alpha = 2 - d\nu} \qquad c$$

Dimensione della energia

libere (parte dipendente da h)

se $Z(t\,h) = \bar{Z}(\bar{t}\,\bar{h})$

$F(t,h) = \bar{F}(\bar{t},\bar{h})$

$$-\int d^d x\, m(x)\, h(x) = -\int d^d \bar{x}\; \bar{m}(\bar{x})\, \bar{h}(\bar{x})$$

$$\int d^d x\, m(x)\, h(x) = L^d \int d^d x\; L^{-x_m} m\, L^{-h_h} h$$

$$= L^{d - x_m - x_h} \int d^d x\; m(x)\, h(x)$$

$$\frac{d - x_m - x_h}{x_t} = \frac{0}{x_t} \qquad \frac{1}{\delta} = \frac{x_m}{x_h}$$

$$\boxed{d\nu - \beta - \beta\delta = 0} \quad \text{(d)}$$

$\eta = 2 - d + 2\,\beta/\nu$ (a)

$\gamma = \nu d - 2\beta$ (b)

$\alpha = 2 - d\nu$ (c)

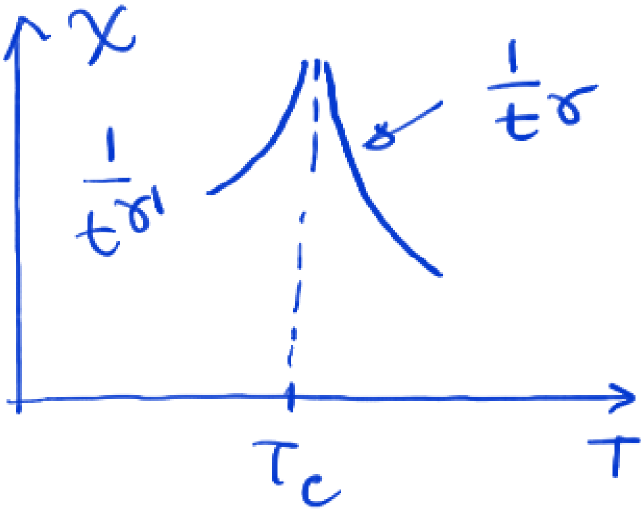
$$\boxed{\alpha\nu - \beta - \beta\delta = 0 \quad (d)}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu$

6 index
4 relazioni
2 indici liberi

In realtà ho più indici critici ma anche più relazioni

$\gamma \to \chi$



più indici critici

per $T < T_c$ $\gamma' \alpha' \nu'$

$\gamma = \gamma'$
$\alpha = \alpha'$
$\nu = \nu'$

più relazioni

2 indici critici indeterminati

Teoria di Landau & leggi di scala

$$\xi^2 \sim \frac{1}{t} \qquad \nu = 1/2 \to x_t = 2$$

vorrei che

$$F_{Landau} = \bar{F}_{Landau}$$

dimensioni di scala di F_{Landau}

$$F_{Landau} = \int d^d x \left\{ \underbrace{a m^2}_{(1)\; x_a} + \underbrace{b m^4}_{(2)\; x_b} - \underbrace{c |\nabla m|^2}_{(3)\; x_c} - \underbrace{h m}_{(4)\; \text{già visto}} \right\}$$

$$\bar{a} = L^{x_a} a \qquad \text{ma } a \sim t \qquad x_a = x_t$$

$\bar{b} = L^{x_b} b$

$\bar{c} = L^{x_c} c$

① $d - 2x_m - x_t = 0$

② $d - 4x_m - x_h = 0$

③ $d - 2 - 2x_m = 0$

④ $d - x_m - x_h = 0$

se $x_t = 2$ in MFT dalla ①

$d - 2x_m - 2 = 0$

$$\boxed{x_m = \frac{d-2}{2}}$$

sostituendo nella ④ ottengo

$d - \frac{d-2}{2} - x_h = 0$

$$\boxed{x_h = \frac{d+2}{2}}$$

$$\beta = \frac{x_m}{x_t} = \frac{d-2}{2 \cdot 2} = \frac{d-2}{4}$$

dipende dalla dimensionalità!

in MFT $\beta = \frac{1}{2}$!!!

$d=4 \Rightarrow$ invariante di scala!

$\Rightarrow$ determinare i 2 indici critici mancanti...

$\Rightarrow$ ~~soluzione del~~ problema

$\Rightarrow$ soluzione "asintotica" vicino al punto critico

$\Uparrow$

Universalità

Leggi di scala

$\Uparrow$

Gruppo di Rinormalizzazione