

FACCIAMO L'ASSUNZIONE CHE POSSIAMO DEFINIRE UNA SCALA DI LUNGHEZZE INTERMEDIE λ : $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \gg l \text{ (distanze medie tra file)} \\ \lambda \ll L \text{ (dimensioni globali del sistema)} \end{array} \right.$

IN QUESTA SCALE POTREMO DEFINIRE I CAMPI CHE DESCRIVONO IL NOSTRO SISTEMA COME CAMPI CONTINUI MA LOCALI, ES: PRESSIONE, TEMPERATURA ETC.

PROBLEMA PER FARE A SISTEMI LONTANI DALL'EQUILIBRIO TERMODINAMICO. NELL'IPOTESI CHE CI SIA PER P.E. UN NUMERO RIDOTTO DI CAMPI RAPPRESENTINO LO STATO DEL SISTEMA ~~potremo descriverlo~~ ~~le~~ SARANNO COME CAMPI CHE DIPENDERANNO ESPlicitAMENTE DALLO SPAZIO E DAL TEMPO

EQUILIBRIO LOCALE

COME PER LA TERMODINAMICA GLOBALE, POICHE' I SISTEMI DI DIMENSIONE λ^3 SONO COMunque GRANDI POSSIAMO DESCRIVERLI CON VARIABILI DI STATO LOCALI. FAREMO L'ASSUNZIONE CHE VALE L'EQUILIBRIO LOCALE Ossia

$$\text{Es locale: } T(r, t), p(r, t) \quad P = P(T, p) \\ p(r, t) = p(T(r, t), p(r, t))$$

ovvero le variabili di stato dipendono dallo spazio e dal tempo solo attraverso la dipendenza delle variabili di stato indipendenti.

QUESTE DUE IPOTESI CI PERMETTONO DI

PASSARE DALLA VARIABILI TERMODINAMICHE A CAMPI
TERMODINAMICI CONTINUI NELLO SPAZIO E NEL TEMPO

Esempio: all'eq. abbiamo $dp = \rho [\chi_T dp - \alpha_p dT]$

Eq locale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} = \rho(\vec{r}, t) \left[\chi_T \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} - \alpha_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \\ \nabla_r p(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) [\chi_T \nabla_r p(\vec{r}, t) - \alpha_p \nabla_r T(\vec{r}, t)] \end{array} \right.$$

Definizione: un fluido non può sostenere una forza di taglio per ogni intervallo di tempo.
Quindi ogni forza di taglio cederà ~~il~~ un flusso di materiale in seno al fluido.

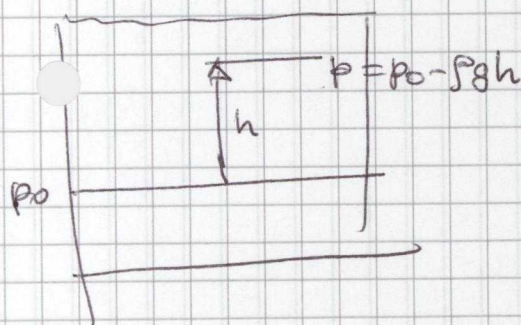
PER UN FLUIDO IN EQUILIBRIO STATICO: LE FORZE DI TAGLIO SONO NULLE, QUINDI GLI STRESS SONO SEMPRE PERPENDICOLARI AD OGNI SUPERFICIE INTERNA AL FLUIDO $\xrightarrow{\text{PASCAL}}$ PRESSIONE E' ISOTROPA

PRESENZA DELLA GRAVITA': ~~$p + \rho g h$~~

Considero un fluido a riposo in presenza di gravità g e voglio sapere come varia la pressione con la profondità.

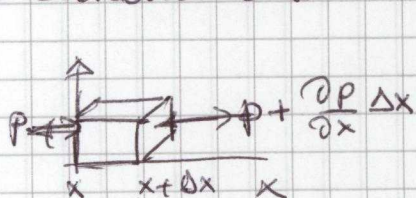
Se abbiamo p_0 in superficie $\perp$ al liquido, allora la pressione a h è ~~p~~ $p = p_0 - \rho g h$

g = forza gravitazionale per unità di massa.



$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g h = \text{costante}} \quad \text{IDROSTATICA}$$

Consideriamo un ~~volume~~ ^{volume} di liquido di dimensioni $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e calcoliamo le forze nette dovute alla pressione:



$$\begin{aligned} \text{lungo } x: \\ p \Delta y \Delta z - \left[p + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x \right] \Delta y \Delta z = \\ = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Generalizziamo vedremo che FORZA PER UNITA' DI VOLUME

$$-\nabla p$$

Supponiamo che $\vec{f}_{ext} = -\rho \nabla \phi \leftarrow$ pot gravitazionale

$\Rightarrow$ CONDIZIONE DI EQUILIBRIO $\boxed{-\nabla p - \rho \nabla \phi = 0}$

Questa condizione esprime non ha in generale soluzione se $\rho \neq \text{cost}$ perché abbiamo un gradiente = qualcosa che non è un gradiente. In questo caso non si può avere equilibrio statico e si stabiliranno dei flussi nel sistema.

Se però $\rho = \text{cost}$ (FLUIDO INCOMPRESSIBILE) $\Rightarrow$

$\boxed{\rho + \rho \phi = \text{costante}}$ EQUILIBRIO STATICO

FORZE DI VOLUME E DI SUPERFICIE: TENSORE DEGLI SFORZI

35

~~Forze di volume e di superficie~~

(FEYNMAN CAP 31)

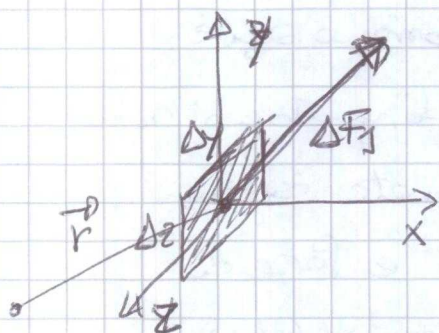
In generale ~~forze~~ su un elemento di fluido possono agire forze di volume, come la gravità, o forze che dipendono solo della posizione nello spazio e sono determinate da un campo esterno (o interno ma a lungo range) e forze di superficie che sono determinate dagli elementi di fluido immediatamente a contatto con l'elemento in considerazione. La pressione è appunto una forza di superficie e deriva dall'azione degli elementi vicini.

Una differenza tra questi due tipi di forze è il loro range di azione: le forze di volume sono a lungo range (macroscopico) le forze di superficie sono a corto range, ossia sono il risultato di interazioni attraverso la superficie dell'elemento di fluido.

Nell'equilibrio idrostatico, la forza di gravità è di volume mentre la pressione è una forza di superficie che agisce attraverso una qualsiasi superficie interna al fluido. Abbiamo poi visto che all'equilibrio, la pressione è sempre ortogonale al piano considerato. Per situazioni di non equilibrio in cui ad esempio il fluido si muove, oppure in sistemi solidi che ~~forza~~ sono in grado di sostenere sforzi di taglio, saranno presenti forze di superficie diverse dalle pressioni che appunto indurranno il moto del fluido o deformeranno il solido.

Consideriamo un corpo di materiale elastico.

immaginiamo un piano immaginario interno al materiale e di questo piano consideriamo un elemento di superficie interno al punto $\vec{r}$ di dimensioni $\Delta y \Delta z$.



Vogliamo sapere la forza attraverso questo elemento di superficie esercitata dal materiale a sinistra ($x < 0$) sul materiale a destra ($x > 0$).

Chiamiamo questa forza $\vec{\Delta F_1}$ indicata

dal vettore in figura.

Se il materiale non è isotropo (oppure non è all'equilibrio) la forza $\vec{\Delta F_1}$ non sarà necessariamente $\perp$ all'elemento di superficie.

Rappresentiamo il vettore con le sue componenti $\Delta F_{1x}, \Delta F_{1y}, \Delta F_{1z}$.

Se $\Delta y \Delta z$ sono piccoli ci aspettiamo (ipotesi di continuità) che il modulo di ΔF_1 sia proporzionale alla superficie $\Delta y \Delta z$, e con le usuali per le singole componenti.

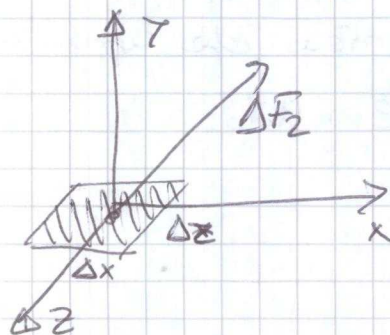
Esprimiamo questo fatto con:

$$\begin{cases} \Delta F_{1x} = \sigma_{xx} \Delta y \Delta z \\ \Delta F_{1y} = \sigma_{yx} \Delta y \Delta z \\ \Delta F_{1z} = \sigma_{zx} \Delta y \Delta z \end{cases}$$

il secondo indice indica la normale all'elemento di superficie.

Quindi σ_{ij} è una densità superficiale di forza come una pressione.

Passiamo poi ad un elemento di superficie perpendicolare all'asse y



$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta F_{2x} = \sigma_{xy} \Delta x \Delta z \\ \Delta F_{2y} = \sigma_{yy} \Delta x \Delta z \\ \Delta F_{2z} = \sigma_{zy} \Delta x \Delta z \end{cases}$$

Invece per un elemento di superficie $\perp$ a $\hat{z}$ si ha:

$$\begin{cases} \Delta F_{3x} = \sigma_{xz} \Delta x \Delta y \\ \Delta F_{3y} = \sigma_{yz} \Delta x \Delta y \\ \Delta F_{3z} = \sigma_{zz} \Delta x \Delta y \end{cases}$$

~~Quasi per un elemento~~

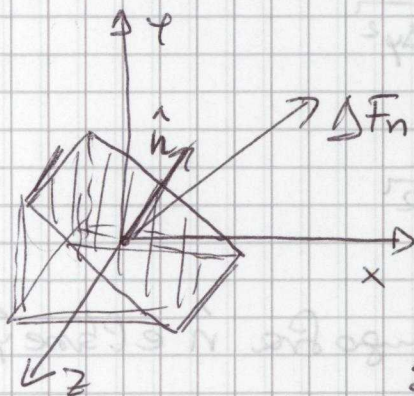
In questo modo abbiamo definito un tensore di rango 2 $\underline{\underline{\sigma}}$ che rappresentiamo con una matrice:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

I cui elementi sono forze per unità di superficie ~~come ab~~

Mostriamo che la conoscenza di $\underline{\underline{\sigma}}$ è sufficiente per descrivere completamente lo stato di stress interno del sistema e che $\underline{\underline{\sigma}}$ è in effetti un tensore.

Sappiamo di voler conoscere lo stress attraverso una superficie orientata in maniera arbitraria, e mostriamo che possiamo ottenere questa informazione da $\underline{\underline{\sigma}}$.



Immaginiamo di isolare un piccolo pezzo della ~~base~~ una parte della superficie ~~da~~ assegnata e le altre facce perpendicolari agli assi.

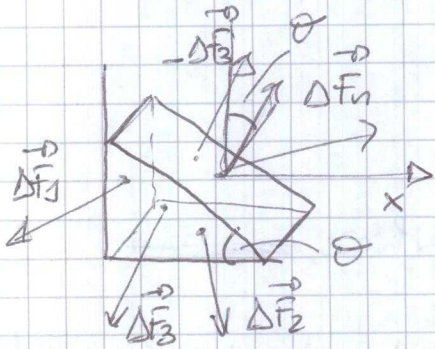
Se il volume è infinitesimo, come nel limite $n \rightarrow \infty$, le forze ~~totali~~ di stress devono essere

in equilibrio e quindi la loro totale si deve annullare.

Questo ci dice che ~~la forza~~ lo stress attraverso la superficie N si deve poter esprimere per mezzo degli stress calcolati prima come attraverso $\underline{\underline{\sigma}}$

La somma (poteri) delle forze di superficie si annullano
trascurare gli effetti ~~delle forze di volume~~ di eventuali
forze di volume (gravità, campi elettrico magnetico o
forze con mazzuoli). Queste forze sono tutte proporzionali
al volume $\Delta V \sim \Delta x \Delta y \Delta z$ mentre le forze di superficie sono $\sim \Delta x \Delta y$
Nel limite $\Delta z \rightarrow 0$ le forze di volume sono sempre trascurabili.

Calcoliamo le forze lungo $\hat{x}$: 5 componenti una per ogni faccia



Tuttavia se $\Delta z \rightarrow 0$ le forze ~~sta alla~~ due
superfici triangolari saranno uguali e
cancelliche e quindi non metterle.

$$\Rightarrow \Delta F_{1x} = \sigma_{xx} \Delta y \Delta z$$

$$\Delta F_{2x} = \sigma_{xy} \Delta x \Delta z$$

equilibrio: $\Delta F_{1x} = \Delta F_{2x} + \Delta F_{3x} = \sigma_{xx} \Delta y \Delta z + \sigma_{xy} \Delta x \Delta z$

La componente x dello shear attraverso la superficie $\hat{n}$ è anche
definita come:

$$\Delta F_{1x} = \sigma_{xn} \Delta z \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xn} = \frac{\sigma_{xx} \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \sigma_{xy} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

ma $\Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \cos \theta$ θ è l'angolo fra $\hat{n}$ e l'asse $\hat{y}$
ovvero $\Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \hat{n} \cdot \hat{y} = n_y$

allo stesso modo $\Delta y / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sin \theta = \hat{n} \cdot \hat{x} = n_x$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{xn} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y}$$

In generale:

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$$

o

$$\sigma_{cn} = \sum_j \sigma_{cj} n_j$$

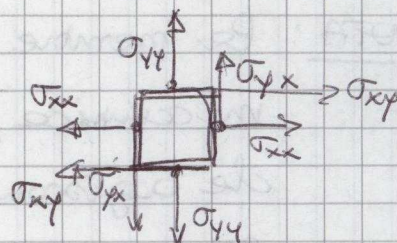
Quindi possiamo calcolare la forza attraverso una qualunque
elemento di
superficie orientata $\hat{n}$ conoscendo $\underline{\sigma}$ semplicemente dalle
relazioni:

$$\vec{F}_n = \underline{\sigma} \cdot \hat{n}$$

↑
Forza per unità
di sup. $\hat{n}$.

$\underline{\sigma}$ È SIMMETRICO:

Consideriamo un cubettino di materiale con le facce orientate
come gli assi. Se il cubo è piccolo ~~possiamo~~
le forze sulle facce opposte ritengono le stesse.



Se vogliamo che la tensione totale sia
nulle (equilibrio) dobbiamo richiedere che

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Se ciò non accadesse il cubettino ruoterebbe.

$$\Rightarrow \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$$

Da questa proprietà di simmetria possiamo dedurre che $\underline{\sigma}$ è
sempre diagonalizzabile, ossia esiste un sistema di assi
principali ortogonali nel quale il tensore $\underline{\sigma}$ è diagonale.

In un fluido all'equilibrio il tensore è sempre diagonale e le
tre componenti diagonali sono proprio la pressione idrostatica

$$\underline{\sigma} = p \delta_{ij}$$

In generale, poiché la densità è invariante per rotazione, definiamo pressione IDROSTATICA:

$$p = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

e definiamo $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p \delta_{ij}$ ~~il tensore degli sforzi~~ $\textcircled{*}$

$\underline{\underline{\sigma}}^*$ è il tensore degli sforzi viscosi perché come vedremo è legato in un fluido alla viscosità del fluido.

Per un fluido all'equilibrio o in moto uniforme, $\underline{\underline{\sigma}}^* = 0$

Il segno di p in $\textcircled{*}$ dipende dal fatto che generalmente il fluido è sotto pressione.

NOTA: La pressione p in $\textcircled{*}$ deve essere intesa come pressione meccanica, definita in termini degli sforzi meccanici che agiscono sull'elemento di fluido. In generale non è possibile definire la pressione da considerazioni termodinamiche poiché il sistema è fuori equilibrio.

NOTA: Il tensore degli sforzi dipende dalle proprietà nello spazio (ed eventualmente dal tempo) ed è quindi un campo tensoriale $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}, t)$

RIFERIMENTO EULERIANO E LAGRANGIANO

Consideriamo un mezzo continuo che si muove con velocità $\vec{v}(\bar{x}, t)$ al tempo t nella posizione $\bar{x}$, misurata rispetto ad un riferimento fisso con origine $O\bar{x}$. Introduciamo un secondo riferimento Oz centrato in $O\bar{z}$ e che si muove con il fluido. Assumiamo che a $t=0$ $O\bar{z} = O\bar{x}$ e consideriamo una particella di fluido a $\bar{x}(0) = \bar{z}$.

Al tempo t la particella ha posizione $x(t)$ in $O\bar{x}$ e nuove forme a z in Oz

$$x(t) = x(t, \bar{x}(0)) = x(t, z)$$

Legge le coordinate delle p. lle di fluido nei due riferimenti

Introduciamo ora un campo $\mathcal{D}(x, t)$ (prob, densità di volume di impulso, energia etc)

$$\begin{array}{ccc} \text{A } t=0 & \text{in } O\bar{x} & \mathcal{D}(x(0), 0) \\ & O\bar{z} & \mathcal{D}'(z, 0) \end{array} \Rightarrow \mathcal{D}(x(0), 0) = \mathcal{D}'(z, 0)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{a } t>0 & \text{in } O\bar{x} & \mathcal{D}(x(z, t), t) \\ & O\bar{z} & \mathcal{D}'(z, t) \end{array} \Rightarrow \mathcal{D}(x(z, t), t) = \mathcal{D}'(z, t)$$

Calcoliamo ora la derivata totale di $\mathcal{D}$ ossia la variazione totale nel tempo.

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial t} \right)_{\bar{z}} = \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \right)_{\bar{x}} + \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \bar{x}} \right)_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{z}} \right)_z$$

$$\text{ma } \vec{v}(\bar{x}, t) \equiv \frac{d\bar{x}}{dt} = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \right)_z$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} \right)_z = \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} \right)_{\bar{x}} + \vec{V} \cdot \nabla_{\bar{x}} \mathcal{Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla_{\bar{x}}}$$

DERIVATA SOSTANZIALE
O CONVETTIVA

↑
tasso totale
di cambiamento
nelle vicinanze di un
pelle di fluido

- $O_{\bar{x}}$ fisso RIFERIMENTO EULERIANO
- $O_{\bar{z}}$ mobile RIFERIMENTO LAGRANGIANO

Consideriamo ora un ~~volume~~ elemento di volume dV_0 a $t=0$
Vogliamo seguire l'evoluzione di questo volume nel tempo. Poiché
 $\bar{x}(0) = \bar{z}$ possiamo scrivere:

$$dV_t = J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} dV_0$$

cas: $dV_0 = dz = d\bar{x}(0)$

$$dV_t = d\bar{x}(t)$$

$$J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \frac{\partial x_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_1} & \frac{\partial x_3}{\partial z_2} & \frac{\partial x_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{JACOBIANO} \\ \text{DELLA TRASF.} \end{matrix}$$

La variazione dello Jacobiano col tempo vista in $O_{\bar{z}}$ è

$$\frac{dJ}{dt}. \text{ Notando che: } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial z_i} \right) = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{dx_j}{dt} \right) = \frac{\partial v_j}{\partial z_i}$$

otteniamo;

$$\frac{dJ}{dt} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial z_1} & \frac{\partial v_1}{\partial z_2} & \frac{\partial v_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \frac{\partial x_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_1} & \frac{\partial x_3}{\partial z_2} & \frac{\partial x_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial z_1} & \frac{\partial v_2}{\partial z_2} & \frac{\partial v_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_1} & \frac{\partial x_3}{\partial z_2} & \frac{\partial x_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial z_1} & \frac{\partial v_2}{\partial z_2} & \frac{\partial v_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial z_1} & \frac{\partial v_3}{\partial z_2} & \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \end{vmatrix}$$

$$= J \begin{pmatrix} v_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} x_1 & v_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

ma formula su

$$\text{ma } \frac{\partial v_i}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial z_j}$$

$$\Rightarrow J \begin{pmatrix} v_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad \text{e così per le altre componenti}$$

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dt} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) J = J \nabla_x \cdot \underline{v}$$

$$\boxed{\frac{dJ}{dt} = J \nabla_x \cdot \underline{v}}$$

EVOLUZIONE DEI
VOLUMI

$$\text{se } \nabla_x \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \frac{dJ}{dt} = 0 \quad \left(\text{Th di Liouville.} \right)$$

(per sistemi hamiltoniani)

EQVAZIONE GENERALE DI BILANCIO

Vogliamo ricavare l'espressione del moto della generica densità $\rho(x, t)$. Consideriamo un volume V_0 a $t=0$ contenente una certa quantità di fluido. Al tempo t lo stesso set di particelle di fluido occuperanno un volume V_t .

La quantità $\rho(t)$ corrispondente alla densità ρ in V_t al tempo t è:

$$D(t) = \int_{V_t} D(x, t) dV_t$$

Il tasso di cambiamento di questa quantità nel tempo visto da un osservatore in moto con il fluido è:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_{V_t} D(x, t) dV_t \right]$$

possiamo riscrivere l'integrale in termini del volume a $t=0$ e questo ci permette di portare la derivata dentro il segno di integrale.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D(t) &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} dV_0 J_t D(x, t) = \int_{V_0} dV_0 \left[\frac{d}{dt} D(x, t) J_t + D \frac{dJ}{dt} \right] = \\ &= \int_{V_0} dV_0 \left(\frac{dD}{dt} + D \bar{\nabla}_x \cdot \bar{v} \right) J_t = \int_{V_t} dV_t \left(\frac{dD}{dt} + D \bar{\nabla} \cdot \bar{v} \right) \end{aligned}$$

Il cambiamento di $D(t)$ deve essere bilanciato da un eventuale flusso di D attraverso la superficie di V_t e da un eventuale termine di sorgente di D interno a V_t .
Avremo:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \int_{V_t} dV_t \left[\frac{dD}{dt} + D \bar{\nabla} \cdot \bar{v} \right] = \int_{V_t} \sigma_D dV_t - \int_{S_t} \vec{J}_D \cdot d\vec{S}_t$$

$$\begin{cases} \sigma_D = \text{sorgente} \\ \vec{J}_D = \text{corrente di } D \end{cases}$$

Applicando Per GAUSS: $\int_{S_t} \vec{J}_D \cdot d\vec{S}_c = \int_{V_t} \vec{\nabla}_x \cdot \vec{J}_D dV_t$ (40)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dD}{dt} = - \oint \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \sigma_D - \vec{\nabla}_x \cdot \vec{J}_D} \quad (1)$$

usando la definizione di derivata materiale si ottiene:

$$\boxed{\frac{DD}{Dt} = - \nabla_x \cdot [D\vec{v} + \vec{J}_D] + \sigma_D} \quad (2)$$

$D\vec{v}$ = CORRENTE CONVETTIVA DI D.

È presente non appena il fluido è in moto.

(1) tasso di cambiamento nel tempo delle densità nelle vicinanze di un punto in un riferimento in moto con la massa di fluido (LAGRANGE).

(2) tasso di cambiamento nel tempo delle densità in un punto fisso nello spazio (EULERO)

(BERNE-PECORA) ↓

Consideriamo un volume fissato nello spazio V_f e integriamo la (2) su quel volume:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_f} dV_f D = - \int_{S_f} (D\vec{v} + \vec{J}_D) \cdot d\vec{S}_f + \int_{V_f} \sigma_D dV_f$$

↑
tasso di cambiamento di D nel tempo in un riferimento fisso

↑
flusso attraverso la superficie di S_f

↑
prodotto di D dentro V_f

CONSERVAZIONE DELLA MASSA: EQ DI CONTINUITA'

41c

Consideriamo un volume V_t che si muove con il fluido
e consideriamo la massa $M(t)$ di fluido contenuta nel volume.
Per la conservazione della massa, in assenza di reazioni, si ha

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(r, t) dV = \int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

giunge

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot \mathbf{J}_\rho = 0 \\ \mathbf{J}_\rho = \rho \mathbf{v} \end{cases}$$

FLUIDO INCOMPRESSIBILE: $\rho = \text{costante} \Rightarrow \rho_t = 0$

$$\begin{cases} \rho_t = 0 \\ \nabla \rho = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = 0}$$

Se $D(t) = \int_V dV \mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ è una quantità conservata,

(4)

come la massa totale, ~~l'energia~~ l'impulso totale o l'energia totale, non ci sarà creazione o distruzione di $\mathcal{D}$ dentro V
 $\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J}_D = 0$ e l'equazione di ~~conservazione~~ si riduce

a:

$$\boxed{\partial_t \mathcal{D} + \nabla \cdot [\mathcal{D} \mathbf{v} + \mathbf{J}_D] = 0} \quad (3)$$

Quindi $\mathcal{D}(t) = \text{cost} \Leftrightarrow \mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ è soluzione di (3) localmente

Consideriamo un sistema ~~in~~ all'equilibrio termodinamico che subisce una piccola perturbazione:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{D}_0 + \delta \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{\mathbf{J}}_D(\mathbf{r}, t) = [\mathcal{D}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_D(\mathbf{r}, t)] = \delta \tilde{\mathbf{J}}_D(\mathbf{r}, t) & (\tilde{\mathbf{J}}_{eq} = 0) \\ \sigma_D(\mathbf{r}, t) = \delta \sigma_D(\mathbf{r}, t) & (\sigma_{eq} = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3) \Rightarrow \partial_t \delta \mathcal{D} + \nabla \cdot \delta \tilde{\mathbf{J}}_D(\mathbf{r}, t) = \delta \sigma_D(\mathbf{r}, t)$$

per risolvere questo tipo di equazioni posso farne alla rappresentazione di Fourier:

$$\begin{cases} f_{\vec{k}} = \int d^3r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}) \\ f(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} f_{\vec{k}} \end{cases}$$

In rappresentazione di Fourier ottengo:

$$\partial_t \delta \mathcal{D}_{\vec{k}}(t) + i\vec{k} \cdot \delta \tilde{\mathbf{J}}_{\vec{k}}(t) = \delta \sigma_{\vec{k}}(t)$$

Se $\mathcal{D}$ corrisponde ad una proprietà conservata $\delta \sigma = 0$

$$\Rightarrow \partial_t \delta \mathcal{D}_{\vec{k}}(t) + i\vec{k} \cdot \delta \tilde{\mathbf{J}}_{\vec{k}}(t) = 0$$

quindi ~~è~~ quando $|k| \rightarrow \infty$, il tasso di cambiamento di $\delta \hat{D}_k(t)$ tende ad annullarsi,

Questo significa che fluttuazioni nelle densità di quantità conservate diventano estremamente (long-lived) ossia che il loro tempo di decadimento $\tau(k) \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$.

Questo tipo di modi verranno detti MODI IDRODINAMICI

Possiamo avere MODI IDRODINAMICI di diversa natura: ($k \rightarrow \infty$)

A) se non ci sono frequenze di propagazione $\omega(k)$ il modo è detto DIFFUSIVO

B) altrimenti il modo è PROPAGANTE

Se la quantità non è conservata $\delta \hat{T}_k \neq 0$ e quindi

$\partial_t \delta \hat{D}_k(t) \neq \delta \hat{T}_k \Rightarrow$ il modo ha un tempo di vite finito anche nel limite $k \rightarrow \infty$ (a meno che $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta T_k = 0$).

ESQUAZIONE DI BILANCIO PER L'IMPULSO

42

L'equazione di bilancio per l'impulso di un elemento di fluido ~~che~~ dentro delle eq. del noto Navier-Stokes:

Se $P(t)$ è l'impulso in un certo volume V_t

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \vec{J}_p = \int_{V_t} dV_t \rho \vec{F}_{ext} + \int_{S_t} \vec{f}_n dS_t$$

$\vec{F}_{ext}$ = forza esterna (eventuale) per unità di volume

$\vec{f}$ = forza per unità di superficie che agisce al boundary del fluido

$$\vec{f}_n = -\underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{n}$$

e con GAUSS $\Rightarrow \int_{S_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{n} dS_t = \int_{V_t} dV_t \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

Applicando la generale legge di bilancio si ottiene:

$$\frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v}(\nabla \cdot \vec{v}) = \rho \vec{F}_{ext} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

J = corrente di impulso $\Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} + \vec{J}(\nabla \cdot \vec{v}) = \rho \vec{F}_{ext} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{J} \vec{v} + \underline{\underline{\sigma}}] = \rho \vec{F}_{ext}}$$

ESNAZIONE DI BILANCIO PER L'ENERGIA

(426)

Se $E(t)$ è l'energia associata al fluido in V_t al t .

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} e(r, t) \, dV$$

↑
densità di energia

L'energia può cambiare perché:

- a) trasportata dalle moto attraverso la superficie = corrente convettiva
- b) l'esterno compie lavoro meccanico al sistema
- c) il calore viene scambiato con l'esterno

b) la forza su dS è $d\vec{F} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\vec{S}$, il lavoro per unità di fatto su $d\vec{S}$ per unità di tempo è:

$$\vec{v} \cdot d\vec{F} = \vec{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \text{Lavoro totale} = \int_{S_t} \vec{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\vec{S}$$

c) Se $\vec{J}_q$ è il flusso di calore $\Rightarrow -\vec{J}_q \cdot d\vec{S}$ è la quantità di calore che entra attraverso $d\vec{S}$ nell'unità di tempo

$$\Rightarrow \text{Calore totale} = - \int_{S_t} \vec{J}_q \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_t} e \, dV = \int_{S_t} (\vec{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \vec{J}_q) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \frac{de}{dt} + e \nabla \cdot \underline{\underline{v}} = \nabla \cdot (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \vec{J}_q)$$

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \vec{J}_q - e \underline{\underline{u}})}$$

IPOTESI 1: FLUIDO INCOMPRESSIBILE $\rho = \text{cost}$ $\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = 0$

che significa?:

- 1) variazioni di pressione sono così piccole che la densità del fluido è essenzialmente costante. Vedremo che per queste ipotesi la velocità del suono risulta infinita, e quindi questo modello è ragionevolmente accurato solo se la velocità del fluido (valore caratteristico) è molto inferiore alla velocità del suono nel mezzo. $v \ll c$

Dall'eq. di continuità $\Rightarrow$ $\nabla \cdot \underline{v} = 0$

$$M = \frac{v}{c} = \frac{\text{NUMERO}}{\text{MACH}}$$

IPOTESI 2: FLUIDO IDEALE con $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$

Trascuriamo gli effetti di attrito (viscosità) tra particelle di fluido adiacenti (vedremo che questo ~~risultato~~ ~~mecc~~ è equivalente a considerare la viscosità nulla o che la dissipazione di energia nulla in zero nel fluido).

J Von Neumann: DRY WATER

$\Rightarrow$ Eq del moto: $\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla p - \rho \nabla \phi$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{for} \\ \text{ext} \end{array} \right. = -\nabla \phi$

ora si può facilmente vedere che: $\nabla \cdot \underline{v} \underline{v} = \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \underline{v} (\nabla \cdot \underline{v})$

per l'incompressibilità $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ si riduce a

$$\partial_t \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi$$

IDENTITÀ VETTORIALE: $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = (\nabla \times \underline{v}) \times \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla (\underline{v} \cdot \underline{v})$

Definiamo ~~circolazione~~ IL ROTORE DI $\underline{v}$ = VORTICITÀ

$$\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t \underline{v} = \underline{\Omega} \times \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla (v^2) = - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi} \quad (*)$$

- FLUSSO A VORTICITÀ NULLA OVUNQUE $\equiv$ IRROTAZIONALE

$$\underline{\Omega} = 0$$

Circolazione di un vettore su un percorso (curve chiuse) è

$$C = \oint \underline{v} \cdot d\underline{e} = \int_{\text{area}} (\nabla \times \underline{v}) \cdot d\underline{s}$$

↑
STOKES

$\Rightarrow$ VORTICITÀ È LA CIRCOLAZIONE DI $\underline{v}$ ~~sempre~~ INTORNO AD UN'AREA UNITARIA (PERPENDICOLARE A $\underline{\Omega}$).

SE VOGLIAMO RISOLVERE $(*)$ PER CONOSCERE LA VELOCITÀ
POSSIAMO APPLICARE IL ROTORE AD ENTRAMBI I MEMBRI
PER ELIMINARE I GRADIENTI

SI OTTIENE:

44

$$\begin{cases} \partial_t \underline{\Omega} + \nabla \times (\underline{\Omega} \times \underline{v}) = 0 \\ \nabla \times \underline{v} = \underline{\Omega} \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0 \end{cases}$$

DETERMINAMO

COMPLETAMENTE $\underline{v}$

ANALOGIA: in elettrodinamica abbiamo le stesse equazioni

per il campo magnetico $\underline{B}$:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{B} = \underline{j} / c^2 \epsilon_0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{cases}$$

FLUSSO IRROTAZIONALE: $\underline{\Omega} = 0 \quad \forall t, \forall r$

$$\Rightarrow \partial_t \underline{\Omega} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ \nabla \times \underline{v} = 0 \end{cases}$$

(Equazioni dell'elettrostatica nel vuoto)

FLUSSO STAZIONARIO - BERNOULLI

Torniamo all'equazione del moto (4) ma consideriamo situazioni di moto stazionario.

STAZIONARIO $\equiv$ il moto non cambia, $\underline{v}$ non dipende esplicitamente dal tempo

$$\partial_t \underline{v} = 0 \quad \underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$$

$$(\underline{\Omega} \times \underline{v}) + \frac{1}{2} \nabla (v^2) = - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi$$

moltiplicando per $\underline{v}$ a sinistra in entrambi i membri si ottiene:

$$\boxed{\underline{v} \cdot \nabla \left[\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right] = 0} \quad (4)$$

Questa equazione ci dice che per un piccolo spostamento nella direzione della velocità del fluido, il termine tra parentesi non cambia.

Come per i campi elettromagnetici, nel caso di flussi stazionari, possiamo considerare le linee di flusso (STREAMLINES) che sono le linee localmente tangenti al campo di velocità. Nei flussi stazionari le particelle di fluido si muovono lungo queste linee.

L'eq. che abbiamo ottenuto $(\oplus)$, ci dice che lungo le linee di flusso:

$$\left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right] = \text{costante} \quad (\text{lungo le linee di flusso})$$

TEOREMA DI BERNOULLI

In generale la costante può essere diversa nelle diverse linee di flusso. Il th di Bernoulli dice soltanto che questa ~~costante~~ quantità rimane costante lungo ogni linea di flusso.

Se però il flusso è IRROTAZIONALE ($\Omega = 0$) e STAZIONARIO ($\partial_t v = 0$) l'eq. del moto si riduce a:

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = \text{costante} \quad (\text{ovunque})}$$

Esprime la conservazione dell'energia

~~l'Eq di Bernoulli non esprime altro che la conservazione dell'energia~~

LINEE DI FLUSSO, TUBI DI FLUSSO,

- LINEE DI FLUSSO: tangenti ad ogni punto $\vec{r}$ del vettore velocità $\vec{v}(\vec{r}, t)$ al tempo t_0 .

- TUBO DI FLUSSO: insieme di linee di flusso che hanno all'estremità due curve chiuse nello stesso piano.

Matematicamente le linee di flusso sono definite come il set di punti $M(x, y, z)$ tali che lo spostamento lungo le linee sia collineare con le vettore velocità. Questa condizione si esprime

Che:

$$d\vec{M} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$



DEFINIZIONE CINEMATICA DEI FLUIDI (FLUSSI?)

(Pt cap. 3)

Qui analizzeremo il concetto di deformazione di una p.le di fluidi necessario per per definire e es. costitutive de legge lo shear tensor con il campo di velocità.

COMPONENTI LOCALI DEL CAMPO GRADIENTE DI VELOCITA'

Consideriamo due punti di fluido a $\vec{r}$ e $\vec{r} + d\vec{r}$ e vogliamo vedere come la velocità del punto è legata a quella del punto.

Al primo ordine nelle variabili si ha:

$$dv_\alpha = \sum_k \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} dx_k$$

Nota: discutendo solo le differenze di velocità le componenti comuni delle velocità non entrano in gioco in effetti la deformazione ~~non~~ è locale non dipende dalla

velocità del moto d'insieme.

(45b)

la grandezza tensoriale i cui elementi sono $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ è detta

tenore GRADIENTE DI VELOCITÀ ed è un campo tensoriale:

$$(\underline{G})_{ij} = (\nabla \cdot \underline{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

~~Proprietà~~ Come tutti i tensori di rango 2 può essere decomposto come somma di un tensore parte simmetrica $\underline{e}$ e una parte antisimmetrica $\underline{\omega}$

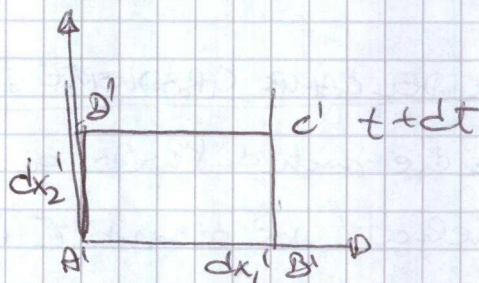
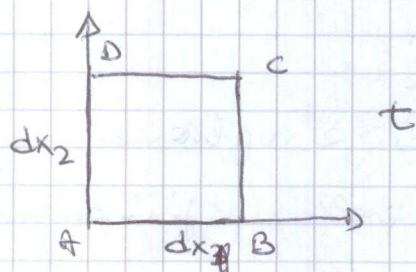
$$\underline{G} = \underline{e} + \underline{\omega}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{e} = \frac{1}{2} [\underline{G} + \underline{G}^T] \\ \underline{\omega} = \frac{1}{2} [\underline{G} - \underline{G}^T] \end{array} \right.$$

COMPONENTE SIMMETTRICA: DEFORMAZIONE PURA

-COMPONENTI DIAGONALI: $e_{ij} = \delta_{ij} \epsilon_{ii}$

consideriamo un elemento di fluido rettangolare di spigoli dx_1, dx_2, dx_3 e consideriamo lo stesso elemento a un tempo dt successivo.



$$\left\{ \begin{array}{l} dx_1' = dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dt \\ dx_2' = dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_2 dt \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta(dx_1)}{dx_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dt = e_{11} dt \\ \frac{\Delta(dx_2)}{dx_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dt = e_{22} dt \end{array} \right.$$

Analogamente nelle terza direzione

$$\frac{\Delta(dx_3)}{dx_3} = e_{33} dt$$

$\Rightarrow$ I TERMINI DIAGONALI DI $\underline{\underline{G}}$ SONO IL TASSO DI ~~DE~~ELONGAZIONE DELL'ELEMENTO DI FLUIDO NELL'UNITA' DI TEMPO

Il relativo cambiamento di volume ϵ : $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(dx_1 dx_2 dx_3)}{dx_1 dx_2 dx_3} =$

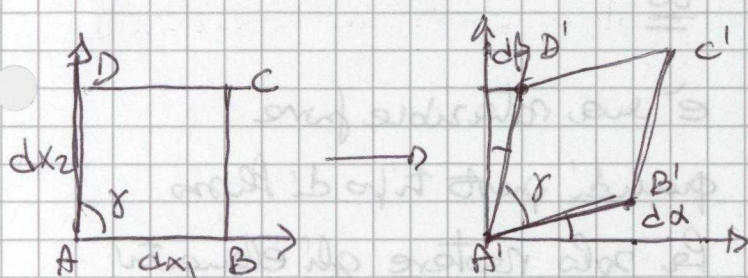
$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dt = (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) dt = \text{Tr}(\underline{\underline{G}}) dt$$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \text{Tr}(\underline{\underline{G}}) dt}$$

la traccia di $\underline{\underline{G}}$ ϵ il tasso di cambiamento di volume nell'unita' di tempo.

FLUIDO INCOMPRESSIBILE : $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{G}}$ ha traccia nulla !!

- COMPONENTI NON-DIAGONALI : $e_{ij} = e_{ji}$ simmetrico.



$$\begin{aligned} A(0,0) &\rightarrow A'(0,0) \\ B(dx_1, 0) &\rightarrow B'(dx_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 dt) \\ D(0, dx_2) &\rightarrow D'(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 dt, dx_2) \\ C(dx_1, dx_2) &\rightarrow C'(dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 dt, dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 dt) \end{aligned}$$

Quindi i vettori vengono trasformati nel seguente modo:

$$d\vec{r}'_C = d\vec{r}_C + \underline{\underline{G}} \cdot d\vec{r}_C dt \quad (\text{al primo ordine nelle variazioni}).$$

Nel caso di solo componenti non diagonali

$$\begin{cases} dx \approx \tan(\alpha) \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dt \\ dy \approx -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} dt \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(dx - dy)}{dt} = -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2e_{12}$$

IL TERMINE OFF-DIAGONALE RAPPRESENTA
LA ~~DEFORMAZIONE~~ VELOCITA' DI DEFORMAZIONE
ANGOLARE LOCALE

Da queste analisi possiamo separare la parte ~~diagonale~~
simmetrica di $\underline{\underline{G}}$ in una parte solo diagonale e una
a traccia nulla:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} + \left[\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} \right] = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{d}}$$

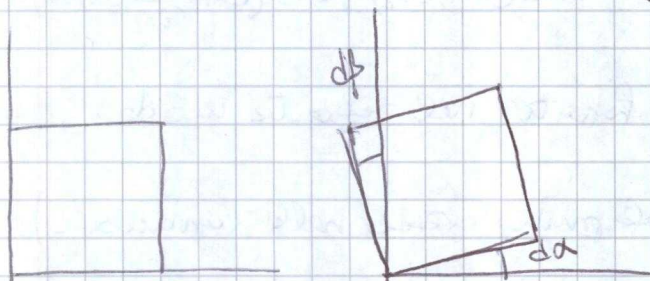
$\underline{\underline{t}}$ = dilatazione di volume
 $\underline{\underline{d}}$ = shear deviatorico (deviatoric stress).

$\underline{\underline{t}}$ = deformazioni ~~senza~~ con cambiamento di volume senza
cambiamento di forma
 $\underline{\underline{d}}$ = deformazioni ~~con~~ ^{con} cambiamento di forma ma non di
volume

COMPONENTE ANTISIMMETRICA: $\underline{\underline{\omega}}$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

è una rotazione pura
quindi questo tipo di flusso
fa solo ruotare gli elementi
di fluido senza deformarli



$$\begin{cases} dx \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1} d\tau \\ d\theta \approx -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} d\tau = -d\alpha \end{cases}$$

$$\omega_{12} \propto \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Rightarrow \underline{\underline{d}} = 0$$

$$\left(\underline{\underline{\omega}} \right)_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$dx = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \omega_{12} dt$$

ω_{ij} = velocità ~~locale~~ angolare di rotazione locale

Un tensore antisimmetrico si può anche esprimere con un vettore omale:

$$\Omega_k = -\varepsilon_{ijk} \omega_{ij}$$

$$\boxed{\underline{\Omega} = \underline{\nabla} \times \underline{v}} \quad \text{VORTICITÀ}$$

Se $\underline{\omega}$ è il vettore velocità angolare locale del fluido in $\underline{r}$ allora si ha $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\Omega}$

Consideriamo un fluido con $\underline{\omega}$ e quindi $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{v} = \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \right) \hat{z} = 2\omega \hat{z} \quad \text{e } \hat{z} \text{ è l'asse di } \underline{\omega} \text{ e per cui } \underline{\omega} \text{ è parallelo all'asse } \hat{z}.$$

SUMMARY:

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\omega}}$$

ESEMPIO: FLUSSO 2D: $\underline{v}(x,y) = (v_x = ax + 2by, v_y = -ay)$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(\underline{\underline{G}}) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

dilatazione deformazione rotazione

Poiché $\text{Tr}(\underline{G}) = 0 \Rightarrow$ FLUSSO INCOMPRESSIBILE

(476)

Il tensore di deformazione può essere diagonalizzato per trovare le direzioni principali di allungamento ed elongazione (nuclei degli autovettori)

eq. caratter.: $(a^2 - \lambda^2 + b^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$

$$V_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \end{pmatrix} \quad V_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \end{pmatrix}$$

⑤ $a \neq 0, b = 0$ pura deformazione: $\underline{d} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $\lambda_{\pm} = \pm a$

~~definito~~ V_+ e V_- sono a 90° uno dall'altro, uno nel primo
quadrante, l'altro nel secondo. Deformazioni esponenziali nel tempo.

⑥ $a = 0, b \neq 0$ FLUSSO ~~di~~ TAGLIO ^{PLANARE} SEMPLICE (COUETTE FLOW PLANARE).

è la sovrapposizione di una deformazione e una rotazione pure:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{d} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

LA FUNZIONE DI FLUSSO (CORRENTE - STREAM FUNCTION)

Come nelle magnetodinamica introduciamo il potenziale vettore, possiamo qui introdurre un ulteriore vettore che in situazioni particolari ci aiuta a interpretare le soluzioni dell'equazione del fluido.

Per un flusso incompressibile $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$

dove $\underline{A}$ è il potenziale vettore per la velocità. In generale preferiamo risolvere le equazioni in termini di $\underline{A}$ anziché $\underline{v}$, eccetto nel caso di flussi bidimensionali o a simmetria assiale.

Flusso 2D: Flusso in cui una componente di $\underline{v}$ è identicamente nulla. In questo caso: ($v_z = 0$)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

possiamo definire uno scalare $\psi(x, y)$: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x$

$$\Rightarrow \underline{A} = \psi \hat{z}$$

La funzione scalare ψ è detta **STREAM-FUNCTION**.

In coordinate polari:

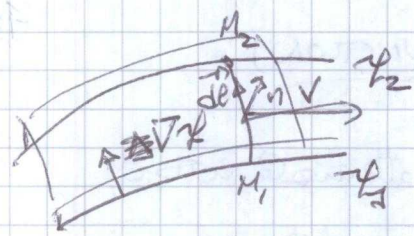
$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} ; v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

PROPRIETÀ DI ψ :

A) Le curve $\psi = \text{cost}$ sono le linee di flusso. Dimostrano che $\underline{v}$ è $\perp$ a $\underline{\nabla} \psi$ e quindi tangente alle linee $\psi = \text{costante}$.

$$\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \psi = v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

B) La differenza $\psi_2 - \psi_1$ rappresenta il tasso di flusso Q di fluido in un tubo di corrente di sezione rettangolare unitata dalle linee ψ_1, ψ_2 e di profondità unitaria lungo $\hat{z}$.



$$Q = \int_1^2 (\vec{v} \cdot \vec{n}) dl$$

ma $dl = (dx, dy, 0) \Rightarrow \hat{n} dl = (dy, -dx, 0)$

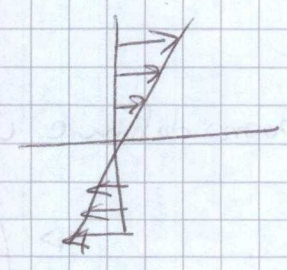
$$\Rightarrow Q = \int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (-dx) \right] = \int_{M_1}^{M_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Quindi per un fluido incomprimibile il tanodiffuso attraverso il suo rotore e costante.

ESEMPI: $\psi(x,y) = ax^2 + by^2$ a, b reali

$\begin{cases} v_x = 2by \\ v_y = -2ax \end{cases}$

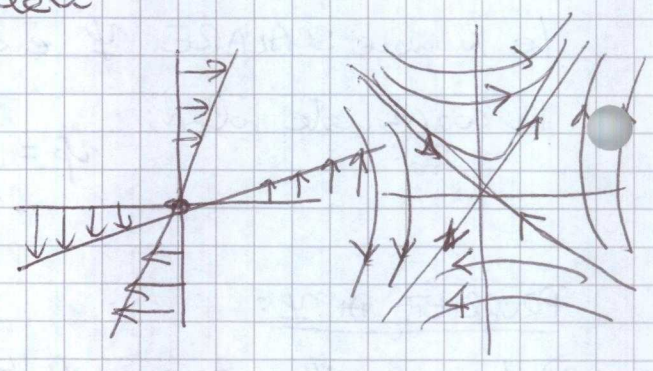
Ⓐ $a/b = 0 \quad \begin{cases} v_x = 2by \\ v_y = 0 \end{cases} \quad \text{SIMPLE SHEAR}$



LINEE DI FLUSSO: $\psi(x,y) = \text{costante}$
rette orizzontali

Ⓑ $a/b = -1 \quad \psi = a(x^2 - y^2)$

~~stream lines.~~
stream lines.
 $a(x^2 - y^2) = \text{costante}$
iperboli equilateri.
 $y = \pm x$ bisettrici



$$\begin{cases} v_x = 2by \\ v_y = 2bx \end{cases} \Rightarrow \nabla \times \underline{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{z} = 0$$

FLUSSO
IRROTAZIONALE

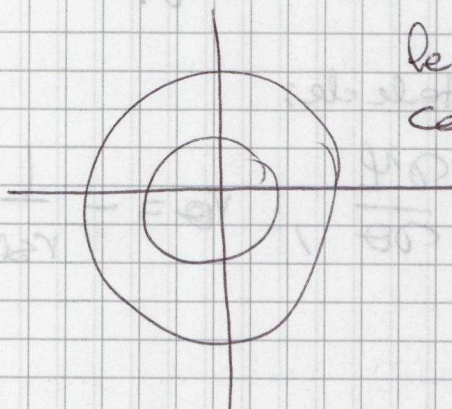
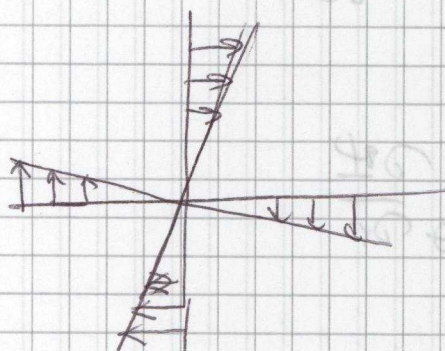
DEFORMAZIONE PURA

⑤ $a/b = 1$

$\begin{cases} v_x = 2ay \\ v_y = -2ax \end{cases}$

ROTAZIONE PURA

49



Le linee di flusso sono
cerchi $\psi = 2(x^2 + y^2) = \text{cost.}$

⑥ Caso generale: $a \neq b \neq 0$ possiamo sempre scrivere la stream function come somma di una di shear e una di rotazione:

$$\psi(x, y) = \frac{b+a}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b-a}{2}(y^2 - x^2) = \psi_{\text{rot}} + \psi_{\text{shear}}$$

— FLUSSO ASSIALE: flussi che possiedono un asse di simmetria rispetto al quale il campo di velocità è invariante per rotazione.

In questo caso introduciamo le STREAM FUNCTION DI STOKES.

⑦ In coordinate cilindriche si ha: $\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

come conseguenza delle simmetrie assiali $\underline{v}$ non dipende da ϕ e

quindi $\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

o ψ $\Rightarrow v_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial z}, v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}$

⑧ PROBLEMA A SIMMETRIA SPERICA:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0$$

per cui
 $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$

Per flussi con simmetria assiale rispetto a $\hat{z}$ le componenti di $\underline{v}$ sono indipendenti da $\varphi \Rightarrow \frac{\partial(r^2 \sin\theta v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin\theta v_\theta)}{\partial \theta} = 0$

addiversa da $\mathcal{I}$ è tale che:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

RELAZIONE COSTITUTIVA PER LO STRESS TENSOR

50

Abbiamo già definito il tensore degli sforzi in termini delle forze superficiali sull'elemento di fluido.

Abbiamo anche visto che per una rete e un tensore simmetrico e che la pressione idrostatica è la sua traccia:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' - p \underline{\underline{I}} \quad p = -\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

Per un fluido in equilibrio abbiamo la sola pressione idrostatica, quindi $\underline{\underline{\sigma}}'$ si genera durante il moto, e in particolare durante il moto relativo di particelle di fluido. $\underline{\underline{\sigma}}'$ è quindi legato alle deformazioni del fluido ed è detto $\underline{\underline{\sigma}}' = \text{TENSORE DEGLI SFORZI VISCOSI}$

Vogliamo ora determinare la relazione tra $\underline{\underline{\sigma}}'$ e deformazione del fluido. Abbiamo visto che il generico campo di velocità $\underline{\underline{G}}$ si separa in:

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\omega}}$$

↑ ↑ ↑
traslazione deformazione rotazione

Poiché le rotazioni non induce deformazioni hanno a che fare con $\underline{\underline{\sigma}}'$ non dipende da $\underline{\underline{\omega}}$, mentre dipende da $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{d}}$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{e}})}$$

RELAZIONE COSTITUTIVA: per i termini di deformazione non posso elevarti (da specificare) faciamo un sviluppo in serie al 1° ordine.

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = 0 \quad \text{se} \quad \underline{\underline{e}} = 0$$

dove $\underline{\underline{A}}$ è un tensore di rango 4.

In un nuovo coordinate (primi) si può dimostrare che la forma più generale di $\underline{\underline{A}}$ è:

$$A_{ijkl} = \cancel{A_{ijkl}} A \delta_{ik} \delta_{jl} + A' \delta_{il} \delta_{jk} + B \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Inoltre poiché $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$ $A_{ijkl} = A_{jikl} \Rightarrow A = A'$

e quindi:

$$\sigma'_{ij} = A \left(\sum_k \delta_{ik} \delta_{jl} e_{kk} + \delta_{jk} \delta_{il} e_{kk} \right) + B \delta_{ij} \sum_k \delta_{kl} e_{kk} =$$

$$\sigma'_{ij} = A (e_{ij} + e_{ji}) + B \delta_{ij} \sum_k e_{kk} = 2A e_{ij} + B \delta_{ij} \text{Tr}(\underline{\underline{e}})$$

Questa relazione si può riscrivere usando $\underline{\underline{e}}$ e $\underline{\underline{e}}'$:

$$\sigma'_{ij} = \underbrace{\eta \left[2 e_{ij} - \frac{2}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{e}}) \delta_{ij} \right]}_{\text{deformazione a volume costante}} + \underbrace{\frac{2}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{e}}) \delta_{ij}}_{\text{dilatazione pura}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \text{VISCOSITA' DI TAGLIO (SHEAR)} \\ \zeta = \text{VISCOSITA' DI VOLUME (BULK)} \end{array} \right.$$

sono i cosiddetti ~~coefficienti~~ COEFFICIENTI DI TRASPORTO, propri di materiali, come dipendono dal materiale in esame.

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \eta \left[\nabla \underline{\underline{v}} + (\nabla \underline{\underline{v}})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{I}} \right] + \zeta (\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{I}}$$

I fluidi per i quali vale questa relazione lineare tra sforzo (shear) e forze (gradiente di velocità) sono detti FLUIDI NEWTONIANI

Sono i fluidi in cui i tempi di rilassamento caratteristici delle strutture microscopiche (catenari) sono molto più rapidi del tempo tipico del gradiente di velocità:

Example: SSF

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{\gamma}$ è il tasso d'inverso di un tempo.

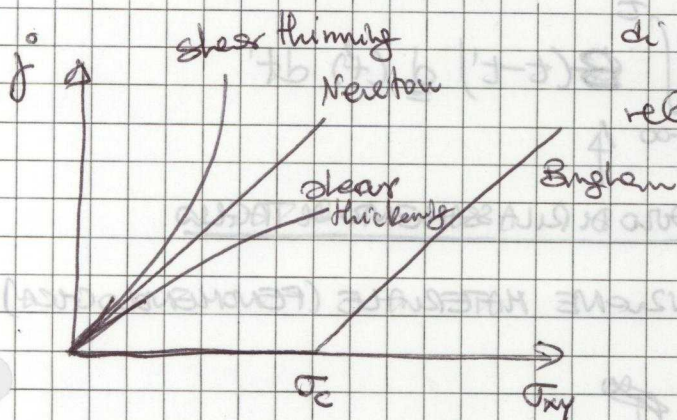
in questo caso ~~relazione~~ la relazione costitutiva per il sistema Newtoniano (legge di Newton) è:

$$\sigma_{xy} = \eta \dot{\gamma}$$

Se chiamo τ il tempo di rilassamento microscopico del sistema, si avrà $\tau \dot{\gamma} < 1$ REGIME NEWTONIANO
 $\tau \dot{\gamma} > 1$ REGIME NON-NEWTONIANO

REOLOGIA: STUDIO DEL COMPORTAMENTO NON-LINEARE DI FLUIDI NON-NEWTONIANI (sospensioni, emulsioni, soluzioni di polimeri).

FLUIDO DI BINGHAM è un fluido che per fluire ha bisogno di un valore critico dello sforzo, poi la relazione lineare (distribuisce).



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{SHEAR THINNING:} \\ \text{SHEAR THICKENING:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \eta(\dot{\gamma}) < \eta(0) \\ \eta(\dot{\gamma}) > \eta(0) \end{array} \right. \quad (\text{reversibile})$$

VISCOELASTICITÀ:

Più in generale si possono avere fluidi non stazionari
 $(\underline{\sigma})(t) = \underline{G}(t)$ e si vuole sapere la risposta del sistema
 a questi flussi. ~~Le~~ I coefficienti di Maxwell e le risposte
 lineari o meno di un materiale sono la maniera in cui
 caratterizzano il materiale stesso.

Se la variazione di $\underline{G}(t)$ nel tempo è lenta ($De = \tau/\eta \ll 1$)
 il sistema ha il tempo di adattarsi al flusso e rimane

viscoso:

~~$\underline{\sigma}(t) = \eta \dot{\underline{d}}(t)$~~
esempio $\underline{\sigma}(t) = \eta \underline{d}(t)$

Se la variazione è molto veloce ~~per~~ allora si può avere un
 comportamento più complicato con effetti di memoria.

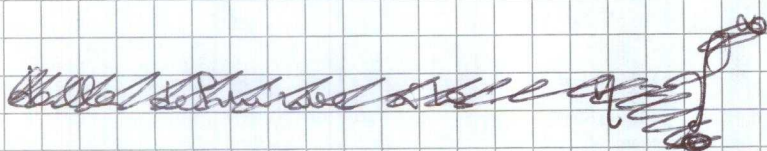
In generale il tensore degli sforzi dipende un funzionale dello
~~stress~~ stress in tempo di deformazione: $\underline{\sigma} = \mathcal{F}[\underline{d}]$

Se l'intensità del flusso è comunque piccola allora sono in
 regime lineare (nell'intensità) e abbiamo una dipendenza
 funzionale lineare:

$$\underline{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t \underset{\uparrow}{B}(t-t') \underline{d}(t') dt'$$

$$B(t-t') = \text{MODULO DI RILASSAMENTO DI TAGLIO}$$

FUNZIONE MATERIALE (FENOMENOLOGICA)



- Caratterizzare il caso in cui

$$\underline{d}(t) \neq \underline{d} \quad t > 0$$

$$\underline{d}(t) = \underline{d} \quad t \leq 0$$

$$\underline{d}(t) = \underline{d} \delta(t)$$

come il caso è costante per $t > 0$.

Dalle definizioni di $\underline{B}(t)$ e η vediamo che vale la relazione:

$$\eta = \int_0^{\infty} \underline{B}(t) dt$$

- Flusso oscillante: $\underline{d}(t) = \underline{d}_0 \cos(\omega t) = \underline{d}_0 \operatorname{Re}(e^{i\omega t})$

~~$$\underline{\sigma}(t) = \underline{d}_0 \operatorname{Re} \left[\int_0^t \underline{B}(t-t') e^{i\omega t'} dt' \right]$$~~

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{d}_0 \operatorname{Re} \left[\int_0^t \underline{B}(t-t') e^{i\omega t'} dt' \right] =$$

$$= \underline{d}_0 \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \int_0^{\infty} \underline{B}(s) e^{-i\omega s} ds \right]$$

$$\underline{B}(\omega)$$

TRASFORMATA DI
FOURIER-LAPLACE

$$\hat{\underline{B}}(\omega) = \hat{\underline{B}}'(\omega) + i \hat{\underline{B}}''(\omega)$$

↑
MODULO DI
IMMAGAZZINAMENTO

↑
MODULO DI
DISSIPAZIONE

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{d}_0 \left[\cos(\omega t) \hat{\underline{B}}'(\omega) - \sin(\omega t) \hat{\underline{B}}''(\omega) \right]$$

NOTA: I COEFFICIENTI FENOMENOLOGICI η, β sono quantità che possono essere legate a fluttuazioni (o meglio momenti di fluttuazioni) del sistema all'equilibrio (LRT) e quindi sono anch'essi ~~FUNZIONI DI STATO~~ FUNZIONI DI STATO

In regime non lineare non è più vero perché anch'essi possono dipendere dalle stime delle deformazioni.

$$b = 4h$$

Consider 6 cases in all

$$b = 4h$$

$$b = 4h$$

and 6 cases in all

For the definition of $B(t)$ and $b(t)$ we have

$$B(t) = \int_0^t b(s) ds$$

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t b(s) ds$$

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t)$$

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t)$$

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t)$$

TRANSFORM IN
TIME

$$\hat{b}(w) = \hat{B}'(w) = i \hat{B}(w)$$

TRANSFORM IN
TIME

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t)$$

TRANSFORM IN TIME

TRANSFORM IN TIME

TRANSFORM IN TIME

TRANSFORM IN TIME

TRANSFORM IN TIME

TRANSFORM IN TIME

Trasformata di Laplace:

Da $f(t)$ si definisce T di Laplace la seguente funzione:

$$\tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} dt f(t) e^{izt} \quad z \text{ è un numero complesso}$$

Se $f(t) \sim O(e^{at}) \quad t \rightarrow \infty$ allora $\tilde{f}(z)$ è analitica nel semipiano $\text{Im}(z) > a$

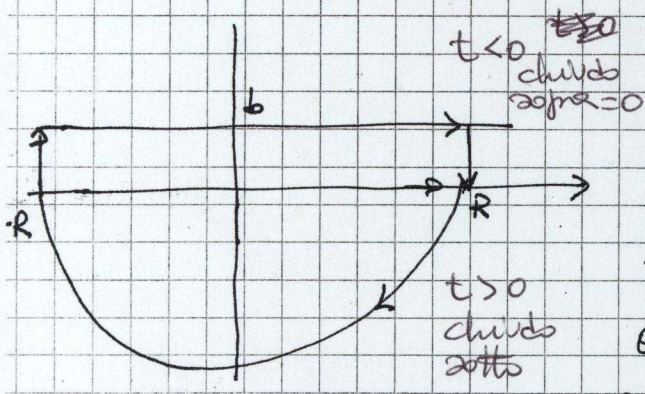
quindi problema risolto con ~~Fourier~~
Laplace funzione intera con ~~Fourier~~

La trasformata inversa è data dalla relazione:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} dz e^{-izt} \tilde{f}(z)$$

Il cammino di integrazione è una retta orizzontale che si sposta all'infinito nel dominio di analiticità di $\tilde{f}(z)$ ($b > a$)

Poiché sopra la retta $\text{Im}(z) = b$ $\tilde{f}(z)$ è analitica, e e^{-izt} è intera, allora l'integrale che definisce la ILT (trasformata inversa) può essere calcolato dal th dei residui integrando sul seguente circuito:



Nel limite $R \rightarrow \infty$ l'integrale da calcolare diventa uguale a $-2\pi i$ Somma dei residui di $\tilde{f}(z) e^{-izt}$ perché per ipotesi le angolarità di $\tilde{f}(z)$ sono sotto $\text{Im}(z) = b$.

Quindi:

$$f(t) = -\frac{2\pi i}{2\pi} \sum \text{Res}[\tilde{f}(z) e^{-izt}]$$

Esempi:

$f(t)$	$\tilde{f}(z)$	
$e^{w_0 t}$	$\frac{1}{z - i w_0}$	$\text{Im}(z) > w_0$
$\sin w_0 t$	$-w_0 / [z^2 - w_0^2]$	$\text{Im}(z) > 0$
$\cos w_0 t$	$+iz / [z^2 - w_0^2]$	"
$\vdots$		

L'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

Abbiamo quindi derivato le espressioni di bilancio per la ~~conservazione~~ densità di corrente di impulso, e le relazioni costitutive per il tensore degli sforzi. Da queste le potremo derivare l'equazione di evoluzione del fluido:

$$\textcircled{1} \quad \partial_t \vec{J} + \nabla \cdot [\vec{v} \vec{J} - \underline{\underline{\sigma}}] = \rho \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad \text{densità di corrente di impulso}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\nabla \Phi \quad \text{potenziale del campo esterno}$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\underline{\sigma}}' = \eta \left[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \underline{\underline{1}} \right] + \zeta (\nabla \cdot \vec{v}) \underline{\underline{1}}$$

η = viscosità di taglio

ζ = viscosità di volume

~~$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' - p \underline{\underline{1}}$$~~

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' - p \underline{\underline{1}} \quad p = \text{pressione idrostatica}$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}' - \nabla p$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \eta \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot \vec{v})$$

$$= \eta \left[\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \right) + \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 v_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}^2} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) =$$

$$= \eta \left[\vec{\nabla} (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla^2 \vec{v} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) =$$

$$= \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} (\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\underline{\underline{\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}}} = \eta \nabla^2 \underline{\underline{v}} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \underline{\underline{\nabla}} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}})$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{\underline{v}})} + \underbrace{\underline{\underline{\nabla}} \cdot (\rho \underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}})} = -\rho \underline{\underline{\nabla}} \phi - \underline{\underline{\nabla}} p + \eta \nabla^2 \underline{\underline{v}} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \underline{\underline{\nabla}} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}})$$

||

$$\underline{\underline{v}} \partial_t \rho + \rho \partial_t \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\nabla}} p \cdot \underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}} + \rho [\underline{\underline{\nabla}} \cdot (\underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}})] =$$

$$= \underline{\underline{v}} \partial_t \rho + \rho \partial_t \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\nabla}} p \cdot \underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}} + \rho \left[(\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \right] = \oplus$$

eq. di continuità $\partial_t \rho + \rho \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \rho = 0$

$$\oplus = \underbrace{\underline{\underline{v}} [\partial_t \rho + \rho (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \rho]}_{0} + \rho \partial_t \underline{\underline{v}} + \rho (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{NS}}: \left[\rho \partial_t \underline{\underline{v}} + \rho \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} = -\rho \underline{\underline{\nabla}} \phi - \underline{\underline{\nabla}} p + \eta \nabla^2 \underline{\underline{v}} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \underline{\underline{\nabla}} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}) \right]$$

$$\left[\partial_t \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} = -\underline{\underline{\nabla}} \phi - \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\nabla}} p + \nu \nabla^2 \underline{\underline{v}} + \frac{\eta}{\rho} \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \underline{\underline{\nabla}} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}) \right]$$

$$\begin{cases} \nu = \frac{\eta}{\rho} = \text{VISCOSITA' CINEMATICA} \\ \zeta = \frac{\zeta}{\rho} \end{cases}$$

~~Eq~~ NS = EQUAZIONE CHE REGOLA IL CAMPO DI VELOCITA'

FLUIDO INCOMPRESSIBILE : $\rho = \text{costante} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

(54)

In queste ipotesi non c'è disomogeneità in effetti di dilatazione
pure, quindi la viscosità di BULK ~~sparisce~~ sparisce, o meglio
l'ultimo termine scompare, mentre le forze di ~~visc~~ superficie
sono espresse interamente dall'ultimo termine proporzionale
alla viscosità cinematica del fluido.

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{T}}_{\text{termine convettivo}} = -\nabla \phi - \frac{\nabla p}{\rho} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{termine viscoso-diffusivo}}} \quad \text{NS-I}$$

FORMA ADIMENSIONALE - NUMERO DI REYNOLDS

Anche facendo l'ipotesi che ρ, μ sono costanti nel fluido, vediamo
che NSI è una eq. non lineare a causa del 2° termine
nel membro di sinistra, ossia le correnti convettive, e da
questo termine viene la completezza del moto dei fluidi
(turbolenza).

Non ci sono, ad oggi, fallimenti di questa teoria, se applicata
~~nei~~ nei vari limiti di validità (η è costante con $\frac{\rho}{\mu}$). Tuttavia
il termine convettivo rende molto complicate le soluzioni.

● Cerchiamo di capire l'importanza relativa del termine
convettivo e del termine diffusivo.

Riscriviamo l'equazione in variabili adimensionali:

$$r' = \frac{r}{L}, \quad v' = \frac{v}{U}, \quad t' = \frac{t}{L/U}, \quad p' = \frac{p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

dove L è la dimensione tipica del sistema (o ha due ostacoli),
 U è la velocità tipica (media) nel sistema.

Si ha: $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \equiv \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'}$

55

$$\nabla_r = \frac{1}{L} \nabla_{r'}$$

NSI: $\frac{U^3}{L} \frac{\partial \underline{v}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \underline{v}' \cdot \nabla_{r'} \underline{v}' = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{L} \frac{1}{2} \rho U^2 \nabla_{r'} p' + \nu \frac{U}{L^2} \nabla_{r'}^2 \underline{v}'$

dividendo tutto per U^2/L si ottiene

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t'} + \underline{v}' \cdot \nabla \underline{v}' = -\nabla p' + \underbrace{\left(\frac{\nu}{UL} \right)}_{1/Re} \nabla^2 \underline{v}'$$

$Re = \frac{UL}{\nu}$ è detto numero di Reynolds = $\frac{\text{flusso convettivo}}{\text{flusso diffusivo}}$

misura Re non lineare dell'esperienza.

$Re = \frac{\text{tempo tipico di diffusione}}{\text{tempo tipico di convezione}}$

$Re \rightarrow \infty$ il flusso diffusivo domina. ~~il profilo di velocità~~

Profilo di velocità ^{stazionario} ~~transiente~~ bilanciare delle forze di viscosità e del gradiente di pressione.

- $Re \rightarrow \infty$ se
- a) $U \rightarrow \infty$ Flussi molto lenti
 - b) $L \rightarrow 0$ dispositivi (o fenomeni) microscopici come batteri o microrganismi
 - c) $\nu \rightarrow \infty$ fluidi molto viscosi

~~FLUSSI STRISCIANTI~~ a $Re \ll 1$

FLUSSI STRISCIANTI (CREEPING)

$Re \rightarrow \infty$ il flusso convettivo domina ed è determinato principalmente da effetti non lineari

■ L'operatore non lineare vettoriale mischia le componenti della velocità e genera flussi vorticosi.

~~Re $\rightarrow \infty$~~

REGIME TURBOLENTO: si osserva per velocità alte, a scale grandi o per fluidi di viscosità piccola.

CONDIZIONI AL BORDO:

Per le due eq. diff. derivate parziali devo specificare c.i. e condizioni al bordo,

INTERFACCIA SOLIDA: poiché il fluido non può penetrare dentro al solido ovvero, ~~deve~~

$$\vec{v}_{\text{solido}} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{\text{imp}} \cdot \vec{n}$$

ovvero la componente

normale alla superficie delle velocità del liquido è uguale alla velocità del solido.

Se la superficie è a riposo la componente $\perp$ a questa delle velocità del fluido è nulla.

Per la componente tangenziale abbiamo due casi:

① SLIP BOUNDARY: per un fluido ideale (viscosità nulla) il fluido può assumere qualsiasi velocità

② STICK BOUNDARY: se il fluido ha viscosità non nulla

si può mostrare che la viscosità previene lo scivolamento alla superficie. Si può mostrare che queste discontinuità genererebbe una densità infinita di energia.

Questo impone che le componenti tangenziali delle velocità del fluido e della superficie siano le stesse.

$$\underline{V}_{||}^{sol} = \underline{V}_{||}^{liq}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{V}_{sol} = \underline{V}_{liq}}$$

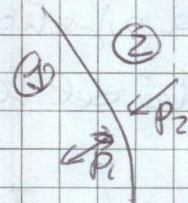
CONDIZIONI AL BORDO AD UNA INTERFACCIA TRA LIQUIDI

In questo caso non dobbiamo solo bilanciare le velocità attraverso l'interfaccia, ma anche assicurarsi che lo shear tensor sia continuo.

* FLUIDI IDEALI: Per i fluidi ideali ($\eta_i = 0$) solo la continuità dello shear normale all'interfaccia si applica. I peschi per definire se $\eta = 0$ lo shear tangenziale è nullo.

Dalle legge di Laplace alla tensione superficiale sappiamo che la pressione ai due lati dell'interfaccia è regolata dalla tensione superficiale γ :

$$p_2 - p_1 = \gamma \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)$$



- Se l'interfaccia è piana $p_2 = p_1$

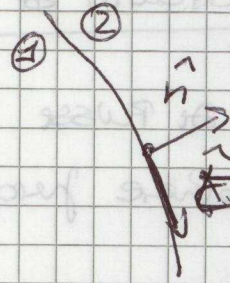
* FLUIDI REALI: $\eta_i > 0$

abbiamo qui anche un bilancio degli sforzi tangenziali alla interfaccia

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{\hat{n}}) \cdot \underline{\hat{t}} = (\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot \underline{\hat{n}}) \cdot \underline{\hat{t}}$$

(57)

queste equazioni esprimono la
continuità delle forze di sforzo attraverso
l'interfaccia.



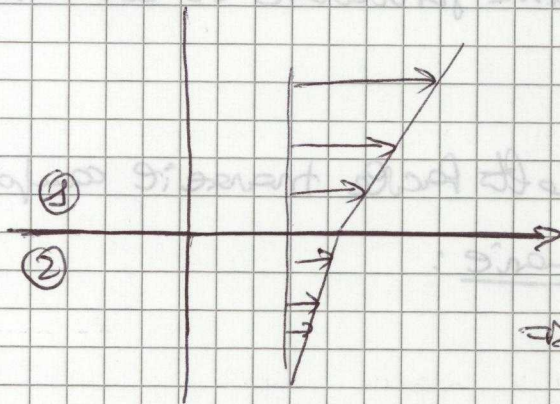
FLUIDI INCOMPRESSIBILI $\underline{\underline{\sigma}}^{(i)} = \eta \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} + (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}})^T \right]$

$$\Rightarrow \eta_1 \left(\left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^{(1)} + (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^{(1)})^T \right] \cdot \underline{\hat{n}} \right) \cdot \underline{\hat{t}} = \eta_2 \left(\left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^{(2)} + (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^{(2)})^T \right] \cdot \underline{\hat{n}} \right) \cdot \underline{\hat{t}}$$

INTERFACCIA

Esempio: INTERFACCIA PIANA

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$



$$\eta_1 \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ GRADIENTE DI VELOCITÀ ALL'INTERFACCIA
È INVERSAMENTE PROPORZ. ALLA
VISCOSITÀ

INTERFACCIA GAS-LIQUIDO: poiché la viscosità del gas

è $\eta_g \approx 0$ ~~abbastanza~~

la condizione di continuità

implica che la velocità tang. del fluido alla superficie
si annulla.

APPLICAZIONI DI NSI A CASI PARTICOLARI

NEL CASO DI FLUSSE 1D o quasi-1D l'eq. di NSI
si può mostrare perché il termine non lineare $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$
è nullo.

In fatti in 1D $v_y = 0, v_z = 0$

e se $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = v_x(y, z)$

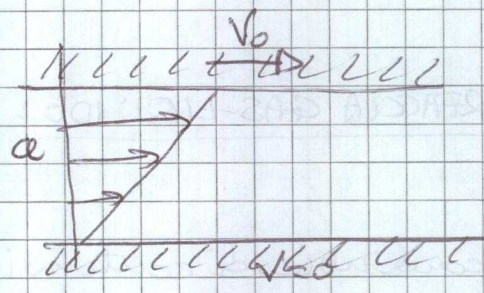
il termine non lineare è: $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v} = 0$

Il termine convettivo è anche perché il fluido è
"incompressibile" e per la geometria particolare 1D del flusso,
non perché $Re \ll 1$.

In queste situazioni è molto facile trovare il campo di
velocità in stazioni stazionarie:

$$\eta \nabla^2 \underline{\mathbf{v}} = \rho \nabla \phi + \nabla p$$

A) SIMPLE SHEAR FLOW:



$$\begin{cases} \hat{x}: \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_x \\ \hat{y}: \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{cases}$$

per simmetria in $\hat{z}$ non ha nulla

Se $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \rightarrow \eta \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_x = 0 \Rightarrow v_x = K_1 y + K_2$

b.c.: $\begin{cases} v_x(0) = 0 \\ v_x(a) = V_0 \end{cases}$

$$v_x(y) = \frac{V_0}{a} y$$

In presenza di gravità (ρ) abbiamo solo un gradiente

di pressione in y senza cambiare il fluido.

Se $\rho(x) = \rho_0 + b x$ gradiente di pressione lineare

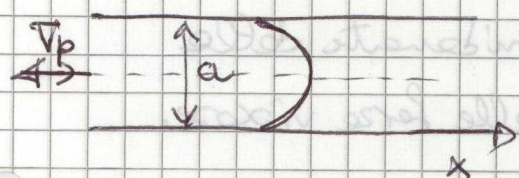
$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{b}{\eta} \rightarrow v_x(y) = \frac{b}{2\eta} y^2 + k_1 y + k_2$$

$$\text{b.c.} : \begin{cases} v_x(0) = 0 \rightarrow k_2 = 0 \\ v_x(a) = v_0 \end{cases}$$

$$v_x(a) = \frac{b}{2\eta} a^2 + k_1 a = v_0 \rightarrow k_1 = \left(\frac{v_0}{a} - \frac{b a}{2\eta} \right)$$

$$v_x(y) = \frac{b}{2\eta} y^2 + \left(\frac{v_0}{a} - \frac{b a}{2\eta} \right) y$$

⑧ FLUSSO DI POISEUILLE TRA PIANI PARALLELI



NS-I stazionaria

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = b$$

$$\text{b.c.} : \begin{cases} v_x(-a/2) = 0 \\ v_x(a/2) = 0 \end{cases}$$

$$v_x(y) = \frac{b}{2\eta} y^2 + k_1 y + k_2$$

$$\begin{cases} v_x(-\frac{a}{2}) = \frac{b}{2\eta} \frac{a^2}{4} + k_1 \frac{a}{2} + k_2 = 0 \\ v_x(\frac{a}{2}) = \frac{b}{2\eta} \frac{a^2}{4} + k_1 \frac{a}{2} + k_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{somma} \left| \frac{b}{\eta} \frac{a^2}{4} + 2k_2 = 0 \right. \\ \left. \text{differenza} \left| k_1 a = 0 \right. \right.$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{b}{2\eta} \frac{a^2}{4} = -\frac{a^2 b}{8\eta}$$

$$V_x(y) = \frac{b}{2\eta} y^2 - \frac{a^2 b}{8\eta} = -\frac{a^2 b}{8\eta} \left(1 - \frac{4}{a^2} y^2\right)$$

profilo parabolico con $V_{\max} = V_x(0)$ nel piano equidistante dalle pareti

$$V_{\max} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \frac{a^2}{8\eta}$$

Q = flusso per unità di lunghezza in $\hat{z}$

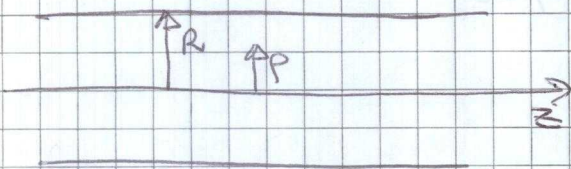
$$Q = \int_{-a/2}^{a/2} V_x(y) dy = -\frac{a^2 b}{8\eta} \left[a - \frac{4}{a^2} \frac{a^3}{24} \right] =$$

$$= -\frac{a^2 b}{8\eta} \left[a - \frac{a}{3} \right] = -\frac{b}{12\eta} a^3$$

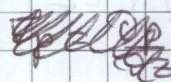
$$\left\{ \begin{array}{l} Q \sim a^3 \text{ per un dato gradiente di pressione} \\ A \sim a \end{array} \right.$$

Il flusso decresce molto più rapidamente dello zero del capillare a causa delle forze viscosi.

③ FLOSSO DI POISEUILLE IN CONDOTTO CILINDRICO



Piano in coordinate cilindriche.



Per simmetria $V_\varphi = 0$ e non c'è componente della velocità lungo circonferenza causata dalle pareti del cilindro

Da $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ e se v_z non dipende da z (non deve essere per simmetria) abbiamo:

(59)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) = 0 \rightarrow v_\rho + \rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{\partial v_\rho}{v_\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{v_\rho(\rho)}{v_\rho(R)} = \frac{R}{\rho} \rightarrow \rho v_\rho(\rho) = R v_\rho(R) = 0 \text{ (b.c.)}$$

$$\Rightarrow v_\rho(\rho) = 0 \quad \forall \rho \in [0, R]$$

NS-I:

$$-\frac{\partial p}{\partial \rho} - \rho g \cos \varphi = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho g \sin \varphi = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) = 0$$

In presenza di gravità si stabilisce un gradiente di pressione lungo ρ e φ (quindi nel piano $\perp$ al flusso) che non influisce il flusso stesso.

la velocità lungo z è determinata dal gradiente di pressione lungo z

$$\propto -\frac{\partial p}{\partial z} = b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) = -\frac{b}{\eta}$$

b.c.: $v_z(R) = 0$

$$v_z(\rho) = v_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) ; \quad v_0 = \frac{b R^2}{4\eta} \quad \text{velocità max nell'asse lungo l'asse.}$$

Il flusso Q attraverso una sezione del tubo è:

$$Q = \int_0^R 2\pi \rho v_z(\rho) d\rho = \frac{\pi b R^4}{8\eta} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q \sim R^4 \\ A \sim R^2 \end{array} \right.$$

Consideriamo un tubo di diametro R e 100 tubi di diametro $R/10$ messi in parallelo. ~~La~~ Il flusso dovuto dallo stesso gradiente di pressione è

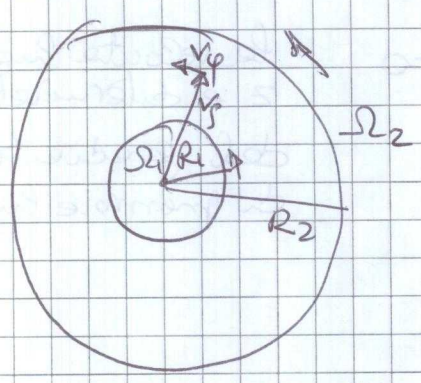
$$Q_1 \sim R^4 \quad Q_2 \sim 100 \left(\frac{R}{10}\right)^4 = 100 \frac{R^4}{10^4} = \frac{R^4}{100}$$

mentre le sezioni totali sono uguali

Questa situazione è molto diversa dalle correnti elettriche nei cavi in parallelo in cui la corrente è proporzionale alle resistenze ~~e la corrente~~. La differenza sta nelle condizioni al bordo ($v(R) = 0$) che aumentano l'"abito" per sezioni piccole.

⑤ FLUSSO DI COUETTE CILINDRICO

Flusso generato tra due cilindri concorrenti rotanti a diverse velocità angolari



In assenza di gradiente di pressione $\nabla p = 0$ lavoriamo in coordinate cilindriche con $\hat{z}$ = axe dei cilindri.

~~Per un'analisi completa vedasi il libro di Kundert~~

Questa semplice geometria è quella dei nodi viscosi. A seconda delle velocità angolari si possono avere diversi regimi di flusso (vedi Feynman). Qui ci interessiamo solo al regime a piccoli Ω in cui il flusso è regolare in cui la pressione e i componenti di velocità sono indipendenti da $\hat{z}$ e ϕ .

In questa situazione per simmetria di traslazione in $\hat{z}$ dobbiamo avere $v_z = 0$

(6)

Inoltre v_φ non dipende da φ perché c'è simmetria di rotazione intorno all'asse.

Per un fluido incomprimibile $\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0 \Rightarrow \boxed{v_\rho = \frac{C}{\rho}}$$

Ma per b.c. $v_\rho(R_1) = v_\rho(R_2) = 0 \Rightarrow v_\rho = 0 \quad \forall \rho$

NS-I: ~~non stazionaria~~ stazionaria.

STAZIONARIA IN COORDINATE CILINDRICHE

$$\begin{cases} -\frac{v_\varphi^2}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} & (1) \\ \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho^2} \right) = 0 & (2) \end{cases}$$

① Forza centrifuga (inertiale) causata dalla curvatura delle traiettorie è bilanciata da un gradiente di pressione nelle direzioni radiali.

Calcolare la v_φ^2 ma questa espressione non influisce il flusso ~~forza~~

② applichiamo in coordinate cilindriche

Cerchiamo una soluzione del tipo: $v_\varphi = a\rho + \frac{b}{\rho}$

le condizioni al bordo impongono.

$$\begin{cases} v_\varphi(\rho=R_1) = \Omega_1 R_1 \\ v_\varphi(\rho=R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \cancel{v_\varphi(\rho)} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\Rightarrow V_\varphi(p) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} p + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{p}$$

la distribuzione delle premiere $p(p)$ può essere ottenuta dalla eq (3)

CASI PARTICOLARI:

① $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ $R_2 - R_1 = d \Rightarrow$ FLUSSO DI COETTE PLANARE

② $\Omega_1 = \Omega_2 \Rightarrow V_\varphi(p) = \Omega p$ Rotazione di corpo rigido

③ $\Omega_2 = 0, R_2 \rightarrow \infty$ equivalente a rimuovere il cilindro esterno

$$V_\varphi(p) = \frac{(\Omega_1 R_1^2)}{p}$$

campo di velocità potenziale
di un 2D flusso vorticoso. (vedi
dopo).

come possiamo definire due campi locali indipendenti e considerare la dipendenza da $\vec{r}$ e t degli altri attraverso la dipendenza di quelli indipendenti e dalle relazioni termodinamiche dell'equilibrio.

Relazione fondamentale $\frac{U}{V} = pu = Tps - P + \tilde{\mu}p$

$$\begin{cases} S = \text{entropia per unit\`a di volume} \\ u = \text{energia per unit\`a di volume} \\ \tilde{\mu} = \text{potenziale chimico per unit\`a di volume} \end{cases}$$

Usando Gibbs-Duhem ~~stato~~ ($p d\tilde{\mu} + p s dT - dp \stackrel{!}{=} 0$)

$$\Rightarrow d(pu) = T d(ps) + \tilde{\mu} dp$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [pu] - T \frac{d}{dt} [ps] + \tilde{\mu} \frac{dp}{dt} = \partial_t(pu) - T \partial_t(ps) + \tilde{\mu} \partial_t p$$

$$+ \underline{v} \cdot \nabla_r(pu) - T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) - \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r(p) = 0$$

ma $\underline{v} \cdot \nabla_r(pu) - T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) - \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r(p) =$

~~$$\underline{v} \cdot \nabla_r(pu) - T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) - \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r(p) =$$~~

$$\begin{cases} \underline{v} \cdot \nabla_r(pu) = \underline{\nabla}_r \cdot [\underline{v} pu] - pu \underline{\nabla}_r \cdot \underline{v} \\ + T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) = \underline{\nabla}_r \cdot [\underline{v} T ps] - T ps \underline{\nabla}_r \cdot \underline{v} - ps \underline{v} \cdot \nabla_r T \\ + \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r p = \underline{\nabla}_r \cdot [\underline{v} \tilde{\mu} p] - p \tilde{\mu} \underline{\nabla}_r \cdot \underline{v} - p \underline{v} \cdot \nabla_r \tilde{\mu} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{v} \cdot \nabla_r(pu) - T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) - \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r p = \underline{\nabla}_r \cdot [\underline{v} (pu - Tps - \tilde{\mu} p)] +$$

$$+ ps \underline{v} \cdot \nabla_r T + p \underline{v} \cdot \nabla_r \tilde{\mu} + \underbrace{[Tps + \tilde{\mu} p - pu]}_{-P} \underline{\nabla}_r \cdot \underline{v} =$$

$$= \underline{v} \cdot [\rho_s \underline{\nabla}_r T + \rho \underline{\nabla}_r \tilde{\mu} - \underline{\nabla}_r P] = 0$$

perché (GD) $\rho_s dT + \rho d\tilde{\mu} - dP = 0$

$$\Rightarrow \frac{d(\rho u)}{dt} + \frac{T d(\rho_s)}{dt} - \tilde{\mu} \frac{d\rho}{dt} = \partial_t(\rho u) - T \partial_t(\rho_s) - \tilde{\mu} \partial_t \rho$$

Assumiamo ora $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow p_e = p_u + \frac{1}{2} \rho v^2$

$$\frac{\partial(p_e)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \partial_t(\rho u) + \underline{v} \cdot \partial_t(\rho \underline{v}) - \frac{1}{2} v^2 \partial_t \rho$$

quindi $T \partial_t(\rho_s) = \partial_t(\rho_e) - \underline{v} \cdot \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} v^2 - \tilde{\mu}\right) \partial_t \rho$

ora $\partial_t \rho = -\underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v})$

ora $\partial_t(\rho \underline{v}) = -\underline{\nabla}_r \cdot [\rho \underline{v} \underline{v} + p \underline{v} \underline{v} \otimes \underline{e}]$

$\partial_t(\rho_e) = -\underline{\nabla}_r \cdot [\bar{\mathcal{J}}_e^R + \bar{\mathcal{J}}_e^D]$

$$\Rightarrow T \partial_t(\rho_s) = -\underline{\nabla}_r \cdot (\bar{\mathcal{J}}_e^R + \bar{\mathcal{J}}_e^D) + \underline{v} \cdot [\underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v} \underline{v} + p \underline{v} \underline{v} \otimes \underline{e})] - \left(\frac{1}{2} v^2 - \tilde{\mu}\right) \underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v})$$

ora $\underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) = \underline{\nabla}_r \rho \cdot \underline{v} \underline{v} + \rho (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} + \rho \underline{v} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) =$

$$= \rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \underline{v} \underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v})$$

ma e: $\underline{v} \cdot \underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) = \underline{v} \cdot [\rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla}] \underline{v} + v^2 \underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v}) = \textcircled{1}$

$$\textcircled{1} = \sum_i v_i \rho \sum_k v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i = \sum_{ik} \rho v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \rho \sum_k v_k \frac{\partial}{\partial x_k} (v^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla}_r (v^2)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \nabla_r (v^2) + v^2 \nabla_r (\rho \underline{v}) = \frac{1}{2} v^2 \nabla_r (\rho \underline{v}) + \frac{1}{2} \nabla_r \cdot (\rho v^2 \underline{v})$$

$$T \partial_t (\rho s) = - \nabla_r \cdot (\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D) + \underline{v} \cdot \nabla p + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho v^2 \underline{v}) + \frac{1}{2} \cancel{v^2} \nabla \cdot \rho \underline{v} + \\ - \underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\sigma} - \left(\frac{1}{2} v^2 + \tilde{\mu} \right) \nabla \cdot (\rho \underline{v})$$

molte:

$$\begin{cases} \underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\sigma} = \nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) - \underline{\sigma} : \nabla \underline{v} \\ \tilde{\mu} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \nabla \cdot (\rho \tilde{\mu} \underline{v}) - \rho \underline{v} \cdot \nabla \tilde{\mu} \end{cases}$$

$$T \partial_t (\rho s) = - \nabla_r \cdot [\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D] + \underline{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \tilde{\mu} \rho \right) \underline{v} \right] - \rho \underline{v} \cdot \nabla \tilde{\mu} + \\ + \nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) + \underline{\sigma} : \nabla \underline{v}$$

ora da GD: $\rho s dT + \rho d\tilde{\mu} - dp = 0 \Rightarrow \underline{v} \cdot [\rho \nabla \tilde{\mu} - \nabla p] = - \rho s \underline{v} \cdot \nabla T$

$$\Rightarrow T \partial_t (\rho s) = - \nabla \cdot [\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D - \rho \tilde{\mu}' \underline{v} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}] + \rho s \underline{v} \cdot \nabla T + \underline{\sigma} : \nabla \underline{v}$$

con $\tilde{\mu}' = \frac{1}{2} v^2 + \tilde{\mu}$

Per ottenere un'equazione di bilancio dobbiamo dividere per T entrambi i membri, e riarrangiando le cose, si ottiene:

$$\partial_t (\rho s) = - \nabla \cdot \left(\frac{\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D - \rho \tilde{\mu}' \underline{v} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}}{T} \right) + \left(\frac{\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D - \rho \tilde{\mu}' \underline{v} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}}{T} \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} \underline{\sigma} : \nabla \underline{v} \quad (44)$$

Consideriamo dapprima il caso di fluido ideale:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J_e^D}} = \underline{\underline{0}} & \text{densità di corrente dissipativa di energia} \\ \underline{\underline{\sigma_s}} = \underline{\underline{0}} & \text{produzione di entropia} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J_e^R}} = \rho \underline{\underline{h}} \cdot \underline{\underline{v}} + \rho s T \underline{\underline{v}} = \rho \left[s T + \tilde{u} + \frac{1}{2} v^2 \right] \underline{\underline{v}} = \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) \underline{\underline{v}}$$

~~$\tilde{u} =$~~

con $h =$ entalpia per unità di massa $\rho h = \rho u + p$

sostituendo in $\textcircled{A}$ per il sistema ideale si ha:

$$\boxed{\rho_t(p s) = -\nabla \cdot (\rho s \underline{\underline{v}})} \quad \text{EQUAZIONE DI BILANCIO DI ENTROPIA NEL FLUIDO IDEALE}$$

Sostituendo ora la forma di $\underline{\underline{J_e^R}}$ nella $\textcircled{A}$ si ottiene l'espressione di bilancio per il fluido viscoso (dissipativo):

$$\rho_t(p s) = -\nabla \cdot \left[\rho s \underline{\underline{v}} + \frac{\underline{\underline{J_e^D}}}{\underline{\underline{T}}} + \frac{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{v}}}{\underline{\underline{T}}} \right] + \frac{1}{\underline{\underline{T}}} \left[\underline{\underline{J_e^D}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{v}} \right] \cdot \frac{\underline{\underline{\nabla T}}}{\underline{\underline{T}}} + \frac{1}{\underline{\underline{T}}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}}$$

definiamo $\underline{\underline{J_D^S}} = \frac{(\underline{\underline{J_e^D}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{v}})}{\underline{\underline{T}}}$ si ha:

$$\boxed{\rho_t(p s) = -\nabla \cdot \left[\rho s \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{J_D^S}} \right] - \frac{1}{\underline{\underline{T}}} \left[\underline{\underline{J_D^S}} \cdot \underline{\underline{\nabla T}} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}} \right]}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma_s}} = -\frac{1}{\underline{\underline{T}}} \left(\underline{\underline{J_D^S}} \cdot \underline{\underline{\nabla T}} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}} \right)} \quad \begin{array}{l} \text{PRODUZIONE DI ENTROPIA} \\ \text{FLUSSO X CAMPI CONIUGATO} \end{array}$$

σ_s è l'equivalente idrodinamico ~~del riscaldamento~~ delle dissipazioni di Joule in un conduttore J·E (corrente x campo).

$$\begin{cases} \underline{\underline{J_D^S}}, \underline{\underline{\sigma}} & \text{correnti generalizzate} \\ \underline{\underline{\nabla T}}, \underline{\underline{\nabla v}} & \text{FORZE GENERALIZZATE} \end{cases}$$

Relazioni costitutive: relazioni lineari tra flussi e forze:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \eta \left[\underline{\underline{\nabla v}} + (\underline{\underline{\nabla v}})^T \right] + \left(\xi + \frac{2}{3} \eta \right) (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad \text{NEWTON}$$

introduciamo ora la legge di Fourier tra la corrente di entropia dissipativa e il gradiente termico:

$$\underline{\underline{J}}_S^D = - \frac{k}{T} \underline{\underline{\nabla T}} \quad k = \text{CONDUCIBILITA' TERMICA}$$

NOTA: non abbiamo effetti meccanici di $\underline{\underline{\nabla T}}$ e $\underline{\underline{\nabla v}}$ in $\underline{\underline{J}}_S^D$ e $\underline{\underline{\sigma}}$ per via delle simmetrie del sistema: un vettore non può perturbare un tensore per motivi di simmetria.

sostituendo queste relazioni nelle relazioni per la produzione di entropia σ_S si ottiene:

$$\sigma_S = - \frac{1}{T} \left[- \frac{k}{T} |\underline{\underline{\nabla T}}|^2 - \eta (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\nabla v}} : \underline{\underline{\nabla v}}) - \left(\xi + \frac{2}{3} \eta \right) (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{\mathbb{I}}} : \underline{\underline{\nabla v}} \right]$$

$$\text{ora } \underline{\underline{\mathbb{I}}} : \underline{\underline{\nabla v}} = \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}$$

$$\underline{\underline{\nabla v}} : \underline{\underline{\nabla v}} = (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}})^2 + \sum_{i,j} \frac{\partial_j v_i}{\partial_i v_j}$$

$$\sigma_S = \frac{k}{T^2} (\underline{\underline{\nabla T}})^2 + \frac{2\eta}{T} \left[\overset{\Gamma_2}{\underline{\underline{K}}} : \underline{\underline{\nabla v}} \right] + \frac{\xi}{T} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}})^2$$

$$\underline{\underline{K}} = \left[\underline{\underline{\nabla v}} + (\underline{\underline{\nabla v}})^T - \frac{2}{3} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right]$$

$\Gamma_2 = \text{SECONDO INVARIANTE SCALARE}$

$$\begin{cases} \partial_t p + \nabla \cdot (p \underline{v}) = 0 \\ \partial_t (p \underline{v}) + \nabla \cdot (p \underline{v} \underline{v}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla (\nabla \cdot \underline{v}) \\ \partial_t (p s) + \nabla \cdot (p s \underline{v} + \underline{J}^D) = \frac{\kappa}{T^2} |\nabla T|^2 + \frac{2\eta}{T} T_2 + \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \underline{v})^2 \end{cases}$$

EQUAZIONI IDRODINAMICHE

LINEARIZZAZIONE: questo set di equazioni sono non lineari e molto complicate da risolvere.

Possiamo tuttavia, se le fluttuazioni dall'eq. sono piccole, linearizzarle per ottenere un set di equazioni trattabili. Il sistema di equazioni che si ottengono descrivono adeguatamente le piccole fluttuazioni intorno all'equilibrio termod. del sistema.

Chiamiamo p_0, T_0, s_0, ρ_0 la densità, temperatura, entropia per unità di volume, e pressione di equilibrio del sistema.

Vicino all'eq. si ha:

$$\begin{cases} p(\underline{r}, t) = p_0 + \delta p(\underline{r}, t) \\ T(\underline{r}, t) = T_0 + \delta T(\underline{r}, t) \\ s(\underline{r}, t) = s_0 + \delta s(\underline{r}, t) \\ \rho(\underline{r}, t) = \rho_0 + \delta \rho(\underline{r}, t) \end{cases}$$

All'equilibrio il campo di velocità è zero e quindi i termini in cui appare $\underline{v}$ sono già al primo ordine nelle fluttuazioni.

Riscriviamo le equazioni idrodinamiche per le fluttuazioni al primo ordine:

(64b)

$$\begin{cases} \partial_t(\delta p) + \nabla(p_0 \underline{v}) = \partial_t(\delta p) + p_0 \nabla \cdot \underline{v} = 0 & (1) \\ p_0 \partial_t \underline{v} = -\nabla(\delta p) + \eta \nabla^2 \underline{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) & (2) \\ p_0 \partial_t(\delta s) + s_0 \partial_t(\delta p) + p_0 s_0 \nabla \cdot \underline{v} - \frac{\kappa}{T_0} \nabla^2 \delta T = 0 \end{cases}$$

usando la (1) per eliminare il 2° e 3° termine nelle (2) e (3) si ottiene

$$p_0 \partial_t(\delta s) = \frac{\kappa}{T_0} \nabla^2(\delta T) \quad (3)$$

Abbiamo quindi 5 equazioni in 7 incognite:

$$\delta p, \delta p, \delta T, \delta s, v_x, v_y, v_z$$

Però nell'ipotesi di equilibrio locale solo 2 variabili termodinamiche sono indipendenti, scegliamo ad esempio $\delta p, \delta T$ come indipendenti. Si ha:

$$\begin{cases} \delta s(\underline{r}, t) = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \delta p(\underline{r}, t) + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \delta T(\underline{r}, t) \\ \delta p(\underline{r}, t) = \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T \delta p(\underline{r}, t) + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p \delta T(\underline{r}, t) \end{cases}$$

Con queste relazioni le equazioni idrodinamiche ~~sono~~ diventano:

$$\begin{cases} \partial_t(\delta p) + p_0 \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ p_0 \partial_t \underline{v} = -\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T \nabla(\delta p) - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p \nabla(\delta T) + \eta \nabla^2 \underline{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) \\ ~~p_0 \partial_t(\delta s) = \frac{\kappa}{T_0} \nabla^2(\delta T)~~ p_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \partial_t(\delta p) + p_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \partial_t(\delta T) = \frac{\kappa}{T_0} \nabla^2(\delta T) \end{cases}$$

FLUIDO IDEALE: $\eta = \xi = \kappa = 0$

(65) $\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1 \right]$

~~la seconda eq:~~

Dalla terza equazione: $\partial_t(\delta T) = - \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \partial_t(\delta p) = + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \partial_t(\delta p)$

la seconda eq:

$$\rho_0 \partial_t \underline{v} = - \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \nabla(\delta p) - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \nabla(\delta T)$$

prendendo la derivata temporale si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial_t^2 \underline{v} &= \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \nabla(\partial_t \delta p)} - \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \nabla \partial_t(\delta p) - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \nabla(\partial_t \delta T) \\ &= - \left[\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \right] \nabla[\partial_t(\delta p)] \end{aligned}$$

ma $\partial_t \delta p = -\rho_0 \nabla \cdot \underline{v}$ (continuità)

$$\Rightarrow \partial_t^2 \underline{v} + \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_s \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) = 0$$

con $\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s$

Se consideriamo il caso unidimensionale $\underline{v} = v_x(x)$
 questa equazione descrive un'onda che si propaga con
 velocità $c_s = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_s \right]^{1/2}$.

$$\partial_t^2 v_x + c_s^2 \partial_x^2 v_x = 0$$

ONDE SONORE IN

UN FLUIDO IDEALE

ONDE LONGITUDINALI

UN FLUIDO IDEALE SOSTIENE ONDE SONORE LONGITUDINALI LA CUI
 VELOCITÀ È DETERMINATA DALLA COMPRESSIBILITÀ ADIABATICA
 DEL FLUIDO.

In un fluido dissipativo, i modi acustici saranno ~~de~~attenuati. Determiniamo ora le relazioni di dispersione per i modi normali di un fluido dissipativo.

A questo scopo introduciamo ~~le~~ i campi trasformati con Fourier dei campi idrodinamici;

$$\hat{p}_{\vec{k}}(t) = \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta p(\vec{r}, t) \iff \delta p(\vec{r}, t) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \hat{p}_{\vec{k}}(t) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Eg. Equazioni idrodinamiche:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{p}_{\vec{k}}(t) + i \rho_0 \vec{k} \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}}{\partial t} = -i \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \vec{k} \hat{p}_{\vec{k}} + i \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \vec{k} \hat{T}_{\vec{k}} - \eta k^2 \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} - \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{k} (\vec{k} \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}) \\ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_T \partial_t \hat{p}_{\vec{k}} + \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \partial_t \hat{T}_{\vec{k}} = - \frac{\kappa}{T_0} k^2 \hat{T}_{\vec{k}} \end{cases}$$

Separiamo la velocità in componente longitudinale ($\parallel \vec{k}^0$) e trasversale ($\perp \vec{k}^0$):

$$\hat{\vec{v}}_{\vec{k}}(t) = \hat{v}_{\vec{k}}^{\parallel}(t) \hat{\vec{k}} + \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}^{\perp}(t)$$

$$\begin{cases} \hat{v}_{\vec{k}}^{\parallel} = \hat{\vec{k}} \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} \\ \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}^{\perp} = \left(\mathbb{I} - \hat{\vec{k}} \hat{\vec{k}} \right) \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}^{\parallel} = \hat{\vec{k}} \hat{\vec{k}} \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} + \left(\mathbb{I} - \hat{\vec{k}} \hat{\vec{k}} \right) \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \text{longitudinale} \qquad \text{trasversale} \end{matrix}$$

Nel regime lineare (piccole fluttuazioni) le componenti della velocità longitudinale e trasversale si disaccoppiano e quindi evolvono secondo diverse equazioni del moto.

Inoltre le componenti longitudinale hanno accoppiamento con la temperatura mentre le altre, trasversali, ~~non~~ mantengono indipendenti.

Si ha:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{p}_k + i \rho_0 k v_k = 0 \\ \rho_0 \partial_t v_k = -i k \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \hat{p}_k + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \hat{T}_k \right] - \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) k^2 v_k \\ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_T \partial_t \hat{p}_k + \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\rho \partial_t \hat{T}_k = - \frac{\kappa}{T_0} k^2 \hat{T}_k \end{cases} \quad (14.4)$$

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}_k^\perp = -\eta k^2 \vec{v}_k^\perp \quad \text{2 equazioni}$$

Le prime 3 equazioni governano il moto dei modi sonori e termici accoppiati (modi sonori sono onde longitudinali nel fluido), le ultime due equazioni (di diffusione) governano i modi di shear (oscillazioni trasversali).

Vogliamo trovare una soluzione delle eq. (14.4) per un dato valore iniziale dei campi (open boundaries):

$$\hat{p}_k(0), \hat{T}_k(0), \vec{v}_k(0)$$

Introduciamo le trasformate di Laplace dei campi:

$$\begin{cases} \tilde{p}_k(z) = \int_0^\infty dt \hat{p}_k(t) e^{izt} & \text{Im}(z) > \alpha \\ \hat{p}_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} dz \tilde{p}_k(z) e^{-izt} & t \geq 0 \end{cases}$$

Le trasformate per le derivate sono:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt (\partial_t \tilde{p}_k) e^{izt} &= \left[\tilde{p}_k e^{izt} \right]_0^\infty - \int_0^\infty dt \partial_t (e^{izt}) \tilde{p}_k(t) = \\ &= -\tilde{p}_k(0) - iz \tilde{p}_k(z) \end{aligned}$$

Le equazioni si hanno per cui quindi:

$$\begin{cases} -i\omega \tilde{p}_k(z) + i\rho_0 k \tilde{V}_k''(z) = +\hat{p}_k(0) \\ -i\omega \rho_0 \tilde{V}_k''(z) + i k \left[\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \tilde{p}_k(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \tilde{T}_k(z) \right] + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) k^2 \tilde{V}_k''(z) = +\hat{V}_k''(0) \\ -i\omega \left[\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \tilde{p}_k(z) + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \tilde{T}_k(z) \right] + \frac{k}{T_0} k^2 \tilde{T}_k(z) = +\rho_0 \left[\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \hat{p}_k(0) + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \hat{T}_k(0) \right] \\ -i\omega \rho_0 \tilde{V}_k^\perp(z) + \eta k^2 \tilde{V}_k^\perp(z) = +\rho_0 \hat{V}_k^\perp(0) \end{cases}$$

Usiamo ora alcune relazioni termodinamiche per semplificare un po':

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T = \frac{c_0^2}{\gamma} = \frac{(\text{velocità del suono adiabatica})^2}{\frac{c_p}{c_p}} = \frac{(\partial p / \partial p)_s}{c_p / c_p} = c_T^2 \text{ velocità isoterma del suono}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p = \rho_0 \frac{c_0^2 \alpha_p}{\gamma} = \frac{\rho_0}{T_0} \frac{c_p - c_p}{\alpha_p}$$

calore di p costante

$$c_p = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p, \quad c_p = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \text{calore specifico a densità costante}$$

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p = \text{espansione termica}$$

$$v_e = \frac{1}{\rho_0} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \text{ velocità elastica longitudinale}$$

$$v_t = \frac{\eta}{\rho_0} \text{ velocità elastica trasversale}$$

$$\chi = \frac{k}{\rho c_p} \text{ diffusività termica}$$

~~Per risolvere le equazioni differenziali in~~
 ~~$-iz \tilde{p}_k(z) + i \rho_0 \tilde{v}_k''(z) = \hat{p}_k(\omega)$~~

Prima di trasformare con Laplace eliminiamo $\hat{p}_k$ dalle
 terza equazione ~~totale~~ usando la prima:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \hat{p}_k + \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T (-ik \rho_0 \hat{v}_k'') = -\frac{k}{T_0} k^2 \hat{T}_k$$

Ora operiamo con Laplace e otteniamo:

$$\begin{cases} -iz \tilde{p}_k(z) + i \rho_0 \tilde{v}_k''(z) = \hat{p}_k(\omega) \\ -iz \tilde{v}_k''(z) + iz \left[\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \tilde{p}_k(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \tilde{T}_k(z) \right] + \left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right) k^2 \tilde{v}_k''(z) = \hat{v}_k''(\omega) \\ -iz \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \tilde{T}_k(z) + \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T [-ik \rho_0 \tilde{v}_k''(z)] + \frac{k}{T_0} k^2 \tilde{T}_k(z) = \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \hat{T}_k(\omega) \\ -iz \rho_0 \tilde{v}_k^+(z) + \eta k^2 \tilde{v}_k^-(z) = \rho_0 \hat{v}_k^+(\omega) \quad (2 \text{ eq.}) \end{cases}$$

Usiamo ora alcune relazioni termodinamiche per semplificare:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T = \frac{c_s^2}{\gamma} = \gamma^2$$

c_s = velocità adiabatica del suono

γ = velocità isoterma del suono

$$\gamma = c_p / c_v$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p = \rho_0 \frac{c_s^2 \alpha_p}{\gamma} = \frac{\rho_0}{T_0} \frac{c_p - c_v}{\alpha_p}, \quad c_p = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p, \quad c_v = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v$$

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \text{espansione termica}$$

$$\nu_e = \frac{1}{\rho_0} \left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right) = \text{viscosità cinematica longitudinale}$$

$$\nu_t = \eta / \rho = \text{viscosità cinematica trasversale}$$

$$\chi = \frac{k}{\rho c_p} = \text{diffusività termica}$$

o/c

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{\rho_0} \gamma^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \quad (\text{relazioni di Maxwell})$$

le equazioni prendono la forma

$$\begin{cases} -iz \tilde{p}_k(z) + i\rho_0 k \tilde{v}_k''(z) = \hat{p}_k(0) \\ (-iz + \nu_k k^2) \tilde{v}_k''(z) + ik \frac{c_s^2}{r\rho_0} \tilde{p}_k(z) + ik \frac{c_s^2 \alpha_p}{\gamma} \tilde{T}_k(z) = \hat{v}_k''(0) \\ \cancel{\tilde{p}_k(z)} \\ \frac{c_p}{\rho_0} (-iz + \gamma \chi k^2) \tilde{T}_k(z) + ik \frac{c_s^2 \alpha_p}{\gamma} \tilde{v}_k''(z) \frac{T_0}{\theta} = \frac{c_p}{\rho_0} \frac{\hat{T}_k(0)}{T_0} \end{cases}$$

$$(-iz + \nu_k k^2) \tilde{v}_k^+(z) = \hat{v}_k^+(0)$$

È un sistema di 5 eq. lineari in 5 incognite.

MODI TRASVERSI

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k^+(z) &= \frac{\hat{v}_k^+(0)}{-iz + \nu_k k^2} = \frac{\hat{v}_k^+(0)}{-i \left[\frac{\nu_k k^2}{i} - z \right]} = \\ &= \frac{\hat{v}_k^+(0)}{i \left[-i \nu_k k^2 - z \right]} = \frac{\hat{v}_k^+(0)}{-i \left[z + i \nu_k k^2 \right]} \end{aligned}$$

Laplace inversa: $\hat{v}_k^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dz \tilde{v}_k(z) e^{-izt} \quad (b=0)$

$b=0$ perché $\hat{v}_k^+(z)$ è analitica ovunque tranne in $z_0 = -i \nu_k k^2$ che è nel semipiano negativo

Im(z)

Re(z)

$z_0 = -i \nu_k k^2$

Per calcolare l'integrale e per $t > 0$ devo chiudere sotto

$$\begin{aligned} \hat{v}_k^+(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{-izt} \tilde{v}_k(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res} \left[e^{-izt} \tilde{v}_k(z), z_0 \right] = \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{v}_k^+(t) = \hat{v}_k^+(0) e^{-\nu_k k^2 t}}$$

EQUAZIONE
DI DIFFUSIONE

MODI TRASVERSI: FLUTTUAZIONI DI VELOCITA' TRASVERSE

67

DECADONO SENZA PROPAGARSI

Se chiamiamo $\gamma(k) = \frac{1}{4}k^2$ $\hat{v}_k^\perp(t) = \hat{v}_k^\perp(0) e^{-t/\tau(k)}$

$\Rightarrow$ le lunghezze d'onda ^{grandi} ~~piccole~~ ($k \rightarrow 0$) decadono molto più lentamente di quelle piccole

CARATTERISTICA DEI MODI IDRODINAMICI $\gamma(k) \rightarrow \infty$
(Quantità conservate) $k \rightarrow 0$

MODI LONGITUDINALI

Queste eq. possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -iz & i\rho_0 k & 0 \\ \frac{ikc_s^2}{\rho_0} & (-iz + \frac{1}{2}k^2) & \frac{ikc_s^2\alpha_p}{\rho} \\ 0 & +ik\frac{c_s^2\alpha_p T_0}{\rho c_p} & (-iz + \gamma k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_k(z) \\ \tilde{v}_k''(z) \\ \tilde{T}_k(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_k(0) \\ \hat{v}_k''(0) \\ \hat{T}_k(0) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}(z, k) \cdot \underline{\tilde{\Phi}}_k(z) = \underline{\hat{\Phi}}_k(0)$$

$$\underline{\tilde{\Phi}}_k(z) = \underline{\underline{M}}^{-1}(z, k) \cdot \underline{\hat{\Phi}}_k(0)$$

la relazione di dispersione dei modi è determinata dalle radici del determinante di $\underline{\underline{M}}$, o, dai poli delle matrici idrodinamiche inverse $\underline{\underline{M}}^{-1}$:

$$D(z, k) = |M(z, k)| = 0$$

~~questo è il determinante~~

$$D(z, k) = -iz \left[(-iz + \frac{1}{2}k^2)(-iz + \gamma k^2) + ik\frac{c_s^2\alpha_p T_0}{\rho c_p} \frac{ikc_s^2\alpha_p}{\rho} \right] - \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$-i\rho_0 k \left[\frac{i k c_s^2}{\rho_0} (-iz + j\chi k^2) \right] =$$

$$D(z, k) = iz^3 - z^2 k^2 (\nu_e + j\chi) - iz k^2 \left[\frac{c_s^2}{\rho} + \frac{c_s^4 \alpha_p^2 T_0}{\rho^2 c_p} + k^2 \nu_e j\chi \right] + k^4 c_s^2 \chi$$

①
②
③

$$① + ② = \frac{c_s^2}{\rho} \left[1 + \frac{c_s^2 \alpha_p^2 T_0}{\rho c_p} \right] = \frac{c_s^2}{\rho} [1 + j - 1] = c_s^2$$

Poiché l'idrodinamica lineare vale solo per perturbazioni lente spaziali e temporali dei campi possiamo limitarci ai termini ① e ② nelle parentesi quadre che sono di $O(k^0)$ e trascurare il termine ③ $\propto O(k^2)$

Otteniamo quindi:

$$D(z, k) \simeq iz^3 - z^2 k^2 (\nu_e + j\chi) - iz k^2 c_s^2 + k^4 c_s^2 \chi$$

che ha le radici:

$$\begin{cases} z_0 = -i \chi k^2 \\ z_{\pm} \simeq \pm c_s k - i \Gamma k^2 \\ \text{(ordine } k^2) \end{cases}$$

COEFFICIENTE DI
~~ATTENUAZIONE~~ ATTENUAZIONE SONORA

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left[j\chi \left(\frac{\rho-1}{\rho} \right) + \nu_e \right]$$

Come per i moti trasversi, la radice immaginaria è associata ad un modo diffusivo, mentre la coppia di radici complesse coniugate sono associate a modi che si propagano e vengono smorzati (onde sonore).

Quindi RIASSUMENDO: L'IDRODINAMICA LINEARIZZATA PREDICE 2 MODI TRASVERSI PURAMENTE DIFFUSIVI E 3 MODI LONGITUDINALI UNO PURAMENTE DIFFUSIVO E 2 DI TIPO OSCILLATORIO.

Calcoliamo esplicitamente il moto di una fluttuazione di densità $\delta p(r, t)$.

(69)

Dalla equazione matriciale abbiamo che:

$$\tilde{p}_k(z) = \frac{1}{\mathcal{D}(k, z)} \begin{vmatrix} \hat{p}_k(0) & i p_0 k & 0 \\ \hat{v}_k''(0) & (-iz + v_0 k^2) & \frac{i k c_s^2 \alpha_p}{\gamma} \\ \hat{T}_k(0) & \frac{i k c_s^2 \alpha_p p_0}{\gamma c_p} & (-iz + \gamma \chi k^2) \end{vmatrix} =$$

imponiamo che le condizioni iniziali siano le seguenti:

$$\hat{p}_k(0) \neq 0, \quad \hat{v}_k''(0) = \hat{T}_k(0) = 0$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k(z) &= \frac{1}{\mathcal{D}(k, z)} \hat{p}_k(0) \left[(-iz + v_0 k^2)(-iz + \gamma \chi k^2) + k^2 c_s^2 \gamma \frac{\gamma-1}{\gamma} \right] \\ &\approx \hat{p}_k(0) \left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{1}{-iz + \chi k^2} + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{1}{-iz + \Gamma^2 k^2 - i c_s k} + \frac{1}{-iz + \Gamma^2 k^2 + i c_s k} \right) \right] \end{aligned}$$

la trasformata di Laplace inversa dà:

$$\hat{p}_k(t) = \hat{p}_k(0) \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} e^{-\chi k^2 t} + \frac{1}{\gamma} e^{-\Gamma^2 k^2 t} \cos(c_s k t) \right\}$$

vediamo quindi che c'è una componente diffusiva associata con la conduttività termica (χ = diffusività termica) e una parte oscillante (onde sonore) ~~che si muove a velocità~~ ~~che si muove a velocità~~ di frequenza $\omega_k = c_s k$ e quindi che si propaga a velocità c_s

RELAZIONE DI
DISPERSIONE DELLE
ONDE SONORE

e de $\hat{e}$ moltiplicate con il coefficiente Γ de
giustifica il suo nome,

